

# 1つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その5 (完)

2021.7.21 鈴木 実

## 1 はじめに

これまで述べたきた行列式の積に関する定理では、それぞれの行列式の1つの行または2つの行を交換した場合の関係式であった [1, 2, 3, 4]。今度は、2つの行列式の積において、複数の行を交換した場合という一般の場合における定理を示す。

## 2 定理

$h+n$  行  $h$  列の行列  $A$  において、 $h \geq n$  とし、さらに、第  $i_1$  行、 $\dots$ 、第  $i_n$  行と第  $j_1$  行、 $\dots$ 、第  $j_n$  行を相異なる  $2n$  個の昇順行番号とする。第  $i_1$  行、 $\dots$ 、第  $i_n$  行を除いてできる  $h$  次行列式を  $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$  のように表す。 $n$  個から  $m$  個を選ぶ組み合わせの数を  $\mu = \binom{n}{m}$  とし、その組み合わせに1から  $\mu$  まで番号を付し、その番号を  $l$  とすると、 $l = 1, 2, \dots, \mu$  である。第  $i_1$  行から第  $i_n$  行までの中から  $m$  行を選ぶ  $k$  番目の組み合わせの行の集合を  $N_k$  と表す。残った行の集合を  $M_k$  とする。同様に、第  $j_1$  行から第  $j_n$  行までの中から  $m$  行を選ぶ  $l$  番目の組み合わせの行の集合を  $\Psi_l$  と表す。残った行の集合を  $\Omega_l$  とする。上で  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  から選ばれた  $m$  個を昇順に  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  とし、残りを昇順に  $\{r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n\}$  とする。同様に、 $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  から選ばれた  $m$  個を昇順に  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  とし、残りを昇順に  $\{s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n\}$  とする。そうすると、

$$N_k = \{r_1, r_2, \dots, r_m\} \quad (1)$$

$$M_k = \{r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n\} \quad (2)$$

$$\Psi_l = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \quad (3)$$

$$\Omega_l = \{s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n\} \quad (4)$$

と表すことができる。 $N_k$  と  $M_k$  は  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  に関して互いに補集合であり、また、 $\Psi_l$  と  $\Omega_l$  は  $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  に関して互いに補集合である。これらの集合はそれぞれ  $\mu$  個ある。

$A$  から  $n$  個の行を取り除いてできる正方行列から行列式を作ることができる。たとえば、第  $r_1, r_2, \dots, r_m$  行、および第  $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n$  行を取り除いた正方行列から作られる行列式を

$$A_{r_1, r_2, \dots, r_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n} \quad (5)$$

と表す。この行列式では、 $n-m$  行を  $r_{m+1}, r_{m+2}, \dots, r_n$  が占め、 $m$  行を  $s_1, s_2, \dots, s_m$  が占めて、残りの行を  $r_l$  でも  $s_l$  でもない  $h-n$  行が占める。ただし、この表し方では  $n$  列から  $m$  列を選ぶ組み合わせの違いを出すのに不便であるので、以下では、これを

$$A_{N_k \Omega_l} \quad (6)$$

と表すことにする。これは、 $N_k$  に含まれる行と  $\Omega_l$  に含まれる行を  $A$  から除いた行列式という意味である。その他の場合も同様である。そのとき、

$$\theta_1 A_{N_p \Omega_1} A_{M_p \Psi_1} + \theta_2 A_{N_p \Omega_2} A_{M_p \Psi_2} \dots + \theta_\mu A_{N_p \Omega_\mu} A_{M_p \Psi_\mu} = A_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (7)$$

が成り立つ。ただし、 $p$  は1から  $\mu$  の間の1つの整数、 $\theta_i = (-1)^{\nu_i}$  で、整数  $\nu_i$  は次のように  $N_p$  と  $\Psi_i$  から決まる。 $A_{N_p \Omega_i} A_{M_p \Psi_i}$  において、 $N_p$  と  $\Psi_i$  の間で要素交換変換 [2] を繰り返す、 $N_p$  と  $\Psi_i$  の元の数が1つずつ

減り,  $m$  回の変換でそれぞれが空集合になるまで続けたとき,  $\nu_i$  は各変換における交換行の間の不对要素の数の合計である<sup>1</sup>.

行列式は行を交換した場合に符号が反転するのみであるから,  $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n, j_1 = h + 1, j_2 = h + 2, \dots, j_n = h + n$  としても構わない. そうすると,

$$N = \{1, 2, \dots, m\}, \quad M = \{m + 1, m + 2, \dots, n\} \quad (8)$$

としてよく,  $\Psi_j$  は  $\{h + 1, h + 2, \dots, h + n\}$  から選ばれた  $j$  番目の組み合わせの  $m$  行であり,  $\Omega_j$  は残りの  $n - m$  行となる. そのとき, 式 (7) は

$$\theta_1 A_{N\Omega_1} A_{M\Psi_1} + \theta_2 A_{N\Omega_2} A_{M\Psi_2} \cdots + \theta_\mu A_{N\Omega_\mu} A_{M\Psi_\mu} = A_{1,2,\dots,n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n} \quad (9)$$

となる. ここで,  $\theta_i = (-1)^{\nu_i}$  であり,  $\nu_i$  は, 左辺の  $i$  番目の項において,  $N$  と  $\Psi_i$  の全ての行を  $m$  回の要素交換変換で入れ替えて右辺と同じにしたときに各変換における交換行の間の不对要素の数の合計である. これが証明すべき式である.

式 (7) あるいは式 (9) の意味は, 2 つの  $h$  次行列式の積において,  $h$  行のうち  $h - n$  行が 2 つの行列式で同じであり, 異なる  $n$  行のうち  $m$  行を互いに交換した行列式の積はどのように表されるか, という問題に対する解である.

### 3 証明

$\Psi_i$  は  $\{h + 1, h + 2, \dots, h + n\}$  から  $m$  個取り出した集合で  $\Omega_i$  はその補集合であるから, 厳密には,  $\Psi_i = \{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,m}\}$  や  $\Omega_i = \{s_{i,m+1}, \dots, s_{i,n}\}$  などのように表すべきであるが, 煩瑣となるので, 紛れがある場合を除いて添字で表すときには  $\{1, 2, \dots, n\}$  を用いる. この添字は, 以下の証明の中で, 要素交換操作において加える行と取り除く行を表すために用い,  $\Psi_i$  と  $\Omega_i$  に共通に使用する. 例えば, 式 (9) を証明するために, 式 (6) から派生する次のような表記を用いる.

$$A_{N_{1-} \Omega_{1,1+}} A_{M_{1+} \Psi_{1,1-}} \quad (10)$$

この式は,  $A_{N\Omega_1}$  の  $N$  の中から第 1 番目の行 (すなわち  $A$  の第 1 行) を  $A_{M\Psi_1}$  の  $M$  へ移動し, さらに要素交換を繰り返し, 最後に  $A_{M\Psi_1}$  の  $\Psi_1$  の中から第 1 番目の行 (すなわち  $A$  の第  $s_1$  行) を  $A_{N\Omega_1}$  の  $\Omega_1$  の中へ移動したという結果を表す. 要するに, 左の行列式の第 1 行と右の行列式の第  $s_1 - m$  行 ( $A$  の  $s_1$  行) を交換した行列式積を表す<sup>2</sup>. あるいは,

$$A_{N\Omega_{1,1+,m+1-}} A_{M\Psi_{1,1-,m+1+}} \quad (11)$$

という式は,  $\Psi_1$  からその 1 番目の行である  $A$  の  $s_1$  行を  $\Omega_1$  へ移動し,  $\Omega_1$  からその 1 番目の行である第  $s_{m+1}$  行を  $\Psi_1$  へ移動した行列式の積をあらわす. すなわち,  $\Omega_1$  と  $\Psi_1$  の間で, 第  $s_1$  行と第  $s_{m+1}$  行を交換した式である. 直接書き下せば,

$$\Omega_{1,1+,m+1-} = \{s_1, s_{m+2}, s_{m+3}, \dots, s_n\}, \quad \Psi_{1,1-,m+1+} = \{s_2, s_3, \dots, s_m, s_{m+1}\}$$

となる. その他の場合も同様である.

式 (9) の証明には数学的帰納法を用いる.  $m = 1$  の場合はすでに [3] で示した. 以下に  $m - 1$  の場合を仮定し, その上で一般の場合を証明する. 証明においては  $m \leq n - m$  とする. 逆の場合は  $m$  と  $n - m$  を交換すればよい.

<sup>1</sup>要素交換変換と不对要素, および符号の決定に関しては文献 [2] に詳しく述べた.

<sup>2</sup>右の行列式  $A_{M\Psi_1}$  の第 1 行から第  $m$  行までは  $N$  に示される行, 第  $m + 1$  行から  $h - n + m$  行は左右の行列式に共通な行, 第  $h - n + m + 1$  行から第  $h$  行までは  $\Omega_1$  に示される行である. 左の  $A_{N\Omega_1}$  についてはこの逆である.

証明の筋道は、第 1 段階で、式 (9) の各項に要素交換変換を用いて  $N$  と  $\Psi$  の行を 1 つ減らし、 $L$  および  $\Sigma$  との関係式を導く。第 2 段階では数学的帰納法の仮定を適用して式 (9) に相当する  $L$  と  $\Sigma$  の関係式を求め、その各項に要素交換変換を用いて  $N$  と  $\Omega$  との関係式を導く。第 3 段階で前段階の両方の関係式が等しいことを示して定理を導く。要素交換変換のときに、不要な項が現れるが、それが一定の総和を取ることでより全部相殺して消えることを示すのであるが、そのとき、または関係式が一致することを示すときに、要素交換変換において用いられる符号係数の定義 [2] を利用する。

### 3.1 第 1 段階

式 (9) 左辺の各行列式積は [3] で用いた要素交換変換を  $\Psi_1$  の 1 番目の行から始めることにより以下のように対積の部分集合で展開できる。

$$\begin{aligned}
A_{N\Omega_1}A_{M\Psi_1} &= \theta_{11,1}[A_{N_{1-}\Omega_{1,1+}}A_{M_{1+}\Psi_{1,1-}}] + \theta_{12,1}[A_{N_{2-}\Omega_{1,1+}}A_{M_{2+}\Psi_{1,1-}}] \\
&+ \cdots + \theta_{1m,1}[A_{N_{m-}\Omega_{1,1+}}A_{M_{m+}\Psi_{1,1-}}] \\
&+ \theta_{1,m+1,1}[A_{N\Omega_{1,1+,m+1-}}A_{M\Psi_{1,1-,m+1+}}] + \theta_{1,m+2,1}[A_{N\Omega_{1,1+,m+2-}}A_{M\Psi_{1,1-,m+2+}}] \\
&+ \cdots + \theta_{1n,1}[A_{N\Omega_{1,1+,n-}}A_{M\Psi_{1,1-,n+}}]
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで、右辺の大括弧は、左辺の対積のうち、大括弧内に示される行列式積にも属する対積の部分集合を表す。この部分集合は左辺の全体の要素積のうちの  $1/n$  である [3]。展開では、まず、右辺第 1 項は、左辺の  $A_{M\Psi_1}$  の  $\Psi_1$  の第 1 番目の行を左へ移動し、要素交換を経て、 $A_{N\Omega_1}$  の  $N$  の第 1 行を右側へ移動する操作で終わる対積の部分集合を表す。 $\theta_{11,1} = (-1)^{\nu_{11,1}}$  で、 $\nu_{11,1}$  は  $N$  の第 1 行と  $\Psi_1$  の第 1 行の間にある不對要素<sup>3</sup>の数、添字の最後の 1 は  $\Psi_1$  の 1 である。右辺第 2 項は、 $\Psi_1$  の第 1 行を左へ、 $N$  の第 2 行を右に移動する操作で終わる対積の部分集合である。 $\theta_{12,1} = (-1)^{\nu_{12,1}}$  で、 $\nu_{12,1}$  は  $N$  の第 2 行と  $\Psi_1$  の第 1 行の間にある不對要素の数で以下第 2 行まで同様である。

第 3 行以下は、まず第 1 項は、右側行列式から  $\Psi_1$  の第 1 行 (つまり  $s_1$  行) を左に移し、左側行列式のから  $\Omega_1$  の第 1 行 (つまり  $s_{m+1}$  行) を右側に移す変換による対積の集合である。 $\theta_{1,m+1,1} = (-1)^{\nu_{1,m+1,1}}$  で、 $\nu_{1,m+1,1}$  は  $\Psi_1$  の第 1 行 (すなわち  $s_1$ ) と  $\Omega_1$  の第 1 行 (すなわち  $s_{m+1}$  行) の間にある不對要素の数である。

以下同様に、 $\Psi_1$  の第 2 番目の行から始まる要素交換により

$$\begin{aligned}
A_{N\Omega_1}A_{M\Psi_1} &= \theta_{21,1}[A_{N_{1-}\Omega_{1,2+}}A_{M_{1+}\Psi_{1,2-}}] + \theta_{22,1}[A_{N_{2-}\Omega_{1,2+}}A_{M_{2+}\Psi_{1,2-}}] \\
&+ \cdots + \theta_{2m,1}[A_{N_{m-}\Omega_{1,2+}}A_{M_{m+}\Psi_{1,2-}}] \\
&+ \theta_{2,m+1,1}[A_{N\Omega_{1,2+,m+1-}}A_{M\Psi_{1,2-,m+1+}}] + \theta_{2,m+2,1}[A_{N\Omega_{1,2+,m+2-}}A_{M\Psi_{1,2-,m+2+}}] \\
&+ \cdots + \theta_{1n,1}[A_{N\Omega_{1,2+,n-}}A_{M\Psi_{1,2-,n+}}]
\end{aligned} \tag{13}$$

と続き、最後に、 $\Psi_1$  の第  $m$  番目の行から始まる要素交換により

$$\begin{aligned}
A_{N\Omega_1}A_{M\Psi_1} &= \theta_{m1,1}[A_{N_{1-}\Omega_{1,m+}}A_{M_{1+}\Psi_{1,m-}}] + \theta_{m2,1}[A_{N_{2-}\Omega_{1,m+}}A_{M_{2+}\Psi_{1,m-}}] \\
&+ \cdots + \theta_{mm,1}[A_{N_{m-}\Omega_{1,m+}}A_{M_{m+}\Psi_{1,m-}}] \\
&+ \theta_{m,m+1,1}[A_{N\Omega_{1,m+,m+1-}}A_{M\Psi_{1,m-,m+1+}}] + \theta_{1,m+2,1}[A_{N\Omega_{1,m+,m+2-}}A_{M\Psi_{1,m-,m+2+}}] \\
&+ \cdots + \theta_{mn,1}[A_{N\Omega_{1,m+,n-}}A_{M\Psi_{1,m-,n+}}]
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。

<sup>3</sup>2 つの行列式で、行列  $A$  の行を共通に持つ行の要素以外の要素を言う。詳しくは文献 [2] に記した。

以上で  $n$  個の関係式が得られる．これと同様の要素交換変換を式 (9) の左辺の他の項についても行うと全部で  $m\mu$  個の関係式が得られる．例えば， $A_{N\Omega_2}A_{M\Psi_2}$  に対しては，

$$\begin{aligned} A_{N\Omega_2}A_{M\Psi_2} &= \theta_{11,2}[A_{N_{1-}\Omega_{2,1+}}A_{M_{1+}\Psi_{2,1-}}] + \theta_{12,2}[A_{N_{2-}\Omega_{2,1+}}A_{M_{2+}\Psi_{2,1-}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{1m,2}[A_{N_{m-}\Omega_{2,1+}}A_{M_{m+}\Psi_{2,1-}}] \\ &\quad + \theta_{1,m+1,2}[A_{N\Omega_{2,1+,m+1-}}A_{M\Psi_{2,1-,m+1+}}] + \theta_{1,m+2,2}[A_{N\Omega_{2,1+,m+2-}}A_{M\Psi_{2,1-,m+2+}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{1,n,2}[A_{N\Omega_{2,1+,n-}}A_{M\Psi_{2,1-,n+}}] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_{N\Omega_2}A_{M\Psi_2} &= \theta_{21,2}[A_{N_{1-}\Omega_{2,2+}}A_{M_{1+}\Psi_{2,2-}}] + \theta_{22,2}[A_{N_{2-}\Omega_{2,2+}}A_{M_{2+}\Psi_{2,2-}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{2m,2}[A_{N_{m-}\Omega_{2,2+}}A_{M_{m+}\Psi_{2,2-}}] \\ &\quad + \theta_{2,m+1,2}[A_{N\Omega_{2,2+,m+1-}}A_{M\Psi_{2,2-,m+1+}}] + \theta_{2,m+2,2}[A_{N\Omega_{2,2+,m+2-}}A_{M\Psi_{2,2-,m+2+}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{2n,2}[A_{N\Omega_{2,2+,n-}}A_{M\Psi_{2,2-,n+}}] \end{aligned} \quad (16)$$

⋮

という関係式になる．以下，同様で， $A_{N\Omega_\mu}A_{M\Psi_\mu}$  に対しては，最後に  $\Psi_\mu$  の  $m$  番目の行の移動から始まる変換により

$$\begin{aligned} A_{N\Omega_\mu}A_{M\Psi_\mu} &= \theta_{11,\mu}[A_{N_{1-}\Omega_{\mu,m+}}A_{M_{1+}\Psi_{\mu,m-}}] + \theta_{12,\mu}[A_{N_{2-}\Omega_{\mu,m+}}A_{M_{2+}\Psi_{\mu,m-}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{1m,\mu}[A_{N_{m-}\Omega_{\mu,m+}}A_{M_{m+}\Psi_{\mu,m-}}] \\ &\quad + \theta_{1,m+1,\mu}[A_{N\Omega_{\mu,m+,m+1-}}A_{M\Psi_{\mu,m-,m+1+}}] + \theta_{1,m+2,\mu}[A_{N\Omega_{\mu,m+,m+2-}}A_{M\Psi_{\mu,m-,m+2+}}] \\ &\quad + \cdots + \theta_{1n,\mu}[A_{N\Omega_{\mu,m+,n-}}A_{M\Psi_{\mu,m-,n+}}] \end{aligned} \quad (17)$$

という関係式で一連の変換が終わる．

要素交換で変換された 1 つの行列式積に属する対積の集合について考えてみよう．式 (12) 以下の式からわかるように，これらの対積の集合は 2 種類存在する．各式の前半の  $m$  項は  $\Psi_1$  の行の数は 1 つ減るが，後半の  $n - m$  項は行の数は変換後も変わらない．たとえば，式 (12) の  $[A_{N_{1-}\Omega_{1,1+}}A_{M_{1+}\Psi_{1,1-}}]_{\Psi_1}$  において， $\Psi_{1,1-}$  はもともとの元の数 1 が減る．一方，同じ式 (12) 第 3 行の  $[A_{N\Omega_{1,1+,m+1-}}A_{M\Psi_{1,1-,m+1+}}]_{\Psi_1}$  の  $\Psi_1$  は行番号 1 が 1 つ減り，新しい行番号  $m + 1$  が 1 つ増えるので行番号の数は変わらない．ここで着目するのは後半の対積の集合である．式 (9) の各項に  $\Psi_i$  の 1 番目の行から始める要素交換変換を施し，これを  $m$  番目の行から始める要素交換変換まで続けて，得られた  $m\mu$  個の式において，各式の後半の  $n - m$  項を総和すると全て相殺して消えることをこれから示す．

これから考えることを理解するための具体的な例として，式 (12) の第 3 式第 1 項を見てみよう． $\Psi_1$  は  $l = 1$  の組み合わせの行集合である．要素交換変換の結果， $\Psi_1$  から 1 つの行  $s_1$  を  $\Omega_1$  に移動し， $\Omega_1$  から別の行  $s_{m+1}$  が  $\Psi_1$  へ移動してできた行の集合も  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  から  $m$  個選んだ組み合わせの 1 つである．これを  $f$  番目の組み合わせとすると，この要素交換変換による 1 対の行の交換は  $\Psi_1$  から  $\Psi_f$  への変換を意味する．ここでは本来なら  $[A_{N\Omega_1}A_{M\Psi_1}]$  から  $[A_{N\Omega_f}A_{M\Psi_f}]$  への変換というべきであるが， $\Psi_1$  から  $\Psi_f$  ということで確実にこの変換であることが特定できるので，以下このように表すことにする．この変換で対積は符号を除いて変わらない．したがって，同じ対積に対して逆の  $\Psi_f$  から  $\Psi_1$  への変換も成り立つ．すなわち，要素交換変換は 1 対 1 可逆写像であり，同じ変換を受ける対積の集合についても同様の関係が成り立つ．したがって，今着目している項についても，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned} [A_{N\Omega_1}A_{M\Psi_1}]_{N\Omega_f} &= \theta_{1,m+1,1}[A_{N\Omega_f}A_{M\Psi_f}]_{N\Omega_1} \\ \theta_{1,m+1,1} &= (-1)^{\nu_{1,m+1,1}} \end{aligned} \quad (18)$$

$\nu_{1,m+1,1}$  は第 1 行と第  $s_{m+1}$  行の間にある不對要素の数である [2]．これらの不對要素の数は交換する行の対が決まれば一義的に決定する．一般に，互いに交換可能な 2 つの  $\Psi$  の間において異なる行はそれぞれの集合の

中で1個のみであり、これが要素交換変換の1対の行となる。一方が要素交換変換の出発行となり、他方が終了行である。反対方向の変換では出発と終了の行が逆になる。異なる行の数が2つ以上あれば、その2つのΨの間で要素交換変換は存在しない。したがって、この変換は上の関係を満たす2つのΨの間で起こる。

この変換は、式(12)以下の関係式からわかるように、全てのΨ<sub>l</sub>の全ての行番号から始まり、全てのΩ<sub>l</sub>の全ての行番号で終わるので、可能な全ての変換が式(12)から式(17)で示されるmμ組の式の右辺後半のn-m項に含まれることがわかる。しかも、変換の始まりと終わりの組み合わせには重複がないから、重複した変換がないこともわかる。式(18)で、大括弧の中は対積の集合の変換先を示し、大括弧の下付き部分は変換元を示している。

一方、式(12)以下式(17)までの関係式の左辺は変換元であり、全てのΨ<sub>l</sub>を網羅している。1つの式がΨ<sub>l</sub>の1つの行から出発する変換となり、その式の右辺はΩ<sub>l</sub>の全ての行が終了行となる対積の集合として後半のn-m項に展開されている。したがって、全てのΨ<sub>l</sub>から変換可能な全ての対積の集合がいずれかの式の右辺に含まれていることになる。式(12)以下式(17)までのmμ組の式の右辺の対積の集合の全体は、任意のΨ<sub>f</sub>から変換されるΨ<sub>g</sub>の全てに対応しているから、Ψ<sub>g</sub>からΨ<sub>f</sub>へ変換される対積の集合も含まれる。つまり、任意のΨ<sub>f</sub>への変換も含まれていることになる。このような1組の対積の集合は式(18)の関係式を満足する。さらに、上で述べたように重複した変換がないから、この(n-m)mμ個の対積の集合は全て式(18)の関係式に従う対積の集合の対に重複なくかつ余りなく分類できることがわかる。なお、全ての式の右辺の後半n-m項の総和は孤立した対を形成しているのでその数は偶数でなければならないが、実際、mとn-mが奇数の場合はnが偶数となり、したがってμは偶数となり、μm(n-m)も偶数であって全ての対積の集合が確かに対に分類できることと矛盾しない。

互いに要素交換変換の関係にある2つの対積の集合は、等しいか、あるいは符号が反対であるか、そのいずれかである。いま、

$$[A_{N\Omega_f} A_{M\Psi_f}]_{\Omega_g} = \theta_{rs,f} [A_{N\Omega_g} A_{M\Psi_g}]_{\Omega_f} \quad (19)$$

$$\theta_{rs,f} = (-1)^{\nu_{rs,f}}$$

の場合を考えてみよう。Ψ<sub>f</sub>は第r行以外は全てΨ<sub>g</sub>と共通で、Ψ<sub>g</sub>は第s行以外は全てΨ<sub>f</sub>と共通であるとする。つまり、Ψ<sub>f</sub>とΨ<sub>g</sub>は互いに第r行と第s行を入れ替えた行番号の集合である。ν<sub>rs,f</sub>は第r行と第s行の間に存在する不對要素の数である(実際には、rとsが決まればΨ<sub>f</sub>とΩ<sub>f</sub>如何に関わらず不對要素の数は決まるのでν<sub>rs</sub>としてもよいが、一般にはrとsは明らかではないのでこのように記している。)したがって、式(19)右辺の係数は1か-1である。しかし、このままでは符号はrとsに依存する関数となるので変数のままである。一方、式(9)の左辺の各項にはΨ<sub>f</sub>で決まる符号係数θ<sub>f</sub>が付してある。この符号とν<sub>rs</sub>を合わせて考えてみよう。

A<sub>NΩ<sub>f</sub></sub> A<sub>MΨ<sub>f</sub></sub>とA<sub>NΩ<sub>g</sub></sub> A<sub>MΨ<sub>g</sub></sub>の行番号を次の表(20)と表(21)で表すことにする。2つの表で、それぞれ第1行は1からh+nまでAの行番号を順に記したもので行位置を示す。中央の大括弧は行列式積を作る2つの行列式に共通する行番号を表す。左と右の括弧は不對要素の行を表す。第2行の左の括弧はNの行番号を表し、右の括弧はΩ<sub>f</sub>の行番号を表す。Nの元は1からmまでになっているが、Nは一定で変わらないのでこれでも良いし、他の組み合わせでも良い。第3行の左の括弧はMの行番号を表し、右の括弧はΨ<sub>f</sub>の元の行番号を表す。

$$\begin{array}{c} (1 \quad 2 \quad \cdots \quad m \quad m+1 \quad \cdots \quad n) \quad [\cdots] \quad (h+1 \quad \cdots \quad r \quad \cdots \quad h+m \quad h+m+1 \quad \cdots \quad s \quad \cdots \quad h+n) \\ N \Omega_f \quad (1 \quad 2 \quad \cdots \quad m) \quad - \quad \cdots \quad - \quad [\cdots] \quad - \quad \cdots \quad (r \quad \cdots \quad h+m \quad - \quad \cdots \quad - \quad \cdots \quad h+n) \\ M \Psi_f \quad - \quad - \quad \cdots \quad - \quad (m+1 \quad \cdots \quad n) \quad [\cdots] \quad (h+1 \quad \cdots \quad - \quad \cdots \quad - \quad h+m+1 \quad \cdots \quad s) \quad \cdots \quad - \end{array} \quad (20)$$



次の表 (21) の第 2 行の右の括弧は  $\Omega_g$  の行番号を表し, 第 3 行の右の括弧は  $\Psi_g$  の行番号を表す. 2 つの表の違いは, 表 (20) は第 2 行に  $r$  を含み第 3 行に  $s$  を含むのに対して表 (21) はその逆であり, それ以外は同じである. すなわち,  $\Omega_f$  に第  $r$  行が入り, 第  $s$  行が入らず,  $\Omega_g$  には第  $r$  行が入らず, 第  $s$  行が入っていること, 逆に  $\Psi_f$  には第  $s$  行が入って, 第  $f$  行が入らず,  $\Psi_g$  には第  $r$  行が入って, 第  $s$  行が入っていないことで, それ以外は全く同じである. したがって, 互いに第  $r$  行と第  $s$  行を交換することにより相互に変換することがわかる. 第  $r$  行と第  $s$  行の間の不对要素の行の数によりその変換の符号は決まる. 今の場合,  $\Psi_f$  から  $\Psi_g$  への変換とその逆変換では変換の符号係数が同じであることがわかる.

$$\begin{array}{c}
 (1 \quad 2 \quad \cdots \quad m \quad m+1 \quad \cdots \quad n) [\cdots] (h+1 \quad \cdots \quad r \quad \cdots \quad h+m \quad h+m+1 \quad \cdots \quad s \quad \cdots \quad h+n) \\
 \hline
 N \Omega_g (1 \quad 2 \quad \cdots \quad m) \quad - \quad \cdots \quad - [\cdots] \quad - \quad \cdots \quad - \quad \cdots (h+m \quad - \quad \cdots \quad s \quad \cdots \quad h+n) \\
 M \Psi_g \quad - \quad - \quad \cdots \quad - (m+1 \quad \cdots \quad n) [\cdots] (h+1 \quad \cdots \quad r \quad \cdots \quad - \quad h+m+1) \quad \cdots \quad - \quad \cdots \quad -
 \end{array} \tag{21}$$

ここで, 式 (9) の  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  の符号を考えてみよう. 考え方としては, 以下のような操作を考える. 左の行列式の  $N$  の 1 つの行と右の行列式の  $\Psi_f$  の 1 つの行を交換し, その結果,  $M$  の行が 1 つ増え,  $\Omega_f$  の行が 1 つ増える. これを続けていくと, 最後に  $N = \emptyset$ ,  $\Psi_f = \emptyset$ ,  $M = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\Omega_f = \{h+1, h+2, \dots, h+n\}$  となる. これは, 式 (9) の  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  が右辺の  $A_{h+1, h+2, \dots, h+n} A_{1, 2, \dots, n}$  の対積に変換されたということを示す. この変換は要素交換変換を  $m$  回繰り返すことである. そして, その都度, 変換の符号係数が掛けられるので,  $m$  回の変換の後では,  $m$  個の符号係数の積が現れる. この積に最初の式 (9) の  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  の符号を掛けたものが  $A_{h+1, h+2, \dots, h+n} A_{1, 2, \dots, n}$  の符号, すなわち  $+1$  に等しいことになる. したがって, 式 (9) 左辺の各項の符号は  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  から  $A_{h+1, h+2, \dots, h+n} A_{1, 2, \dots, n}$  への  $m$  回の変換の係数ということになる.

これを表 (20) で具体的に見れば, まず最初の変換では, 第 2 段の第 1 行と第 3 段の  $h+1$  行の交換でその間の不对要素の数, すなわち,  $\nu_{1, h+1, f}$  は  $n-1$  となる. 次の変換では, 第 2 段の第 2 行と第 3 段の次の行の交換へと進み, 最後に第 2 段の第  $m$  行と第 3 段の  $s$  行の交換が済んでこれにより全ての交換における不对要素の数の合計が決まる. ここで, 第 2 段の交換する行の順番を替えても, 不对要素の合計だけが問題になるので, 結果には影響しない. なぜなら, 不对要素の行が交換で右へ移動してもしなくても, その行の位置は変わらず, 計数されるときはいずれの場合でも必ず計数されるからである. 不对要素の数の合計が偶数なら係数は  $1$  で奇数なら  $-1$  となる.

一般に,  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  の符号の正負は組み合わせの中身が具体的にわからなければ決まらない. しかし, 式 (9) における  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  と  $A_{N, \Omega_g} A_{M, \Psi_g}$  の符号係数の違いは表 (20) と表 (21) から判断することができる. ここでは,  $N$  全部と  $\Psi_f$  または  $\Psi_g$  全部を交換して符号係数を決める方法を  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  と  $A_{N, \Omega_g} A_{M, \Psi_g}$  の場合に考えてみよう. 表 (20) と表 (21) の違いは第  $r$  行と第  $s$  行が第 3 段にあるかないかの違いだけである. この場合,  $\Psi_f$  と  $N$  の全部を交換するとき, および  $\Psi_g$  と  $N$  の全部を交換するが, 交換する  $N$  の行の順番によって不对要素の数の合計は変わらないのであるから,  $\Psi_f$  の  $s$  行と  $N$  の 1 つの行を交換するとき,  $\Psi_g$  の  $r$  行と  $N$  の 1 つの行を交換するときの  $N$  のほうの行を共通にしておいても構わない. 今の場合,  $r$  行と  $s$  行以外は全て同じであるから, この 2 つの行以外の交換は全て同じにしておくことができる. したがって, これを共通にしておけば,  $N$  のその行と表 (20) の  $s$  行に挟まれる不对要素の数と, 表 (21) でその共通な行と  $r$  行に挟まれる不对要素の数の違いが  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  と  $A_{N, \Omega_g} A_{M, \Psi_g}$  の符号係数の違いになるということがわかる. それ以外の行の交換は両方とも同じであるからそこから差は生じない. 共通な行から第  $r$  行までの不对要素の数は同じであるから, 共通な行から第  $s$  行までの不对要素の数は, 第  $r$  行と第  $s$  行の間の不对要素の数と第  $r$  行の分の  $1$  を加えたものになる. したがって, 第  $r$  行と第  $s$  行の間の不对要素の数が奇数なら  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  と  $A_{N, \Omega_g} A_{M, \Psi_g}$  の符号は同じであり, 第  $r$  行と第  $s$  行の間の不对要素の数が偶数なら  $A_{N, \Omega_f} A_{M, \Psi_f}$  と  $A_{N, \Omega_g} A_{M, \Psi_g}$  の符号は異なることがわかる.

すなわち, このことから次のことが結論できる. 式 (12) 以下の展開式のうち,  $A_{N, \Omega_i} A_{M, \Psi_i}$  の第 1 行から始まる展開式を式 (9) の左辺に代入し, 次に  $A_{N, \Omega_i} A_{M, \Psi_i}$  の第 2 行から始まる展開式を別に用意した式 (9) の左

辺に代入し，これを  $\Psi_i$  の第  $m$  行から始まる展開式まで  $m$  回繰り返す，得られた  $m$  個の式を辺辺加え合わせる．そうすると，式 (12) 以下の各式で後半の  $n - m$  項 (第 3 行から第 4 行の部分に相当する部分) は式 (18) の関係式により全ての項が対になっていて，その対は符号が同じか反対であることがわかる．これらの対積の集合の対が反対符号のときは交換する行の間の不对要素の数が奇数であり，その場合は上の考察から式 (9) の該当する項の符号が同符号である．したがって，この場合は 2 つの対積の集合は相殺することがわかる．一方，対積の集合の対が同符号のときは交換する行の間の不对要素の数が偶数である．この場合は式 (9) の該当する項の符号は反対である．したがって，この場合も 2 つの対積部分集合は相殺することがわかる．結局，式 (12) 以下の変換式を式 (9) の左辺に代入すると各式の後半の  $n - m$  項 (第 3 行と第 4 行に示す対積集合) は全て相殺して消えることがわかる．その結果，式 (9) の左辺を  $X$  とおくと，式 (9) は次のように表される．

$$\begin{aligned}
mX &= m(\theta_1 A_{N \Omega_1} A_{M \Psi_1} + \theta_2 A_{N \Omega_2} A_{M \Psi_2} \cdots + \theta_\mu A_{N \Omega_\mu} A_{M \Omega_\mu}) \\
&= \theta_1 \{ \theta_{11,1} [A_{N_1 - \Omega_{1,1+}} A_{M_{1+} \Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} + \theta_{12,1} [A_{N_2 - \Omega_{1,1+}} A_{M_{2+} \Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{N_m - \Omega_{1,1+}} A_{M_{m+} \Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} \} \\
&+ \theta_1 \{ \theta_{21,1} [A_{N_1 - \Omega_{1,2+}} A_{M_{1+} \Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} + \theta_{22,1} [A_{N_2 - \Omega_{1,2+}} A_{M_{2+} \Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{2m,1} [A_{N_m - \Omega_{1,2+}} A_{M_{m+} \Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} \} \\
&\vdots \\
&+ \theta_1 \{ \theta_{m1,1} [A_{N_1 - \Omega_{1,m+}} A_{M_{1+} \Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} + \theta_{m2,1} [A_{N_2 - \Omega_{1,1+}} A_{M_{2+} \Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{mm,1} [A_{N_m - \Omega_{1,1+}} A_{M_{m+} \Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} \} \\
&+ \theta_2 \{ \theta_{11,2} [A_{N_1 - \Omega_{2,1+}} A_{M_{1+} \Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} + \theta_{12,2} [A_{N_2 - \Omega_{2,1+}} A_{M_{2+} \Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{N_m - \Omega_{2,1+}} A_{M_{m+} \Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} \} \\
&+ \theta_2 \{ \theta_{21,2} [A_{N_1 - \Omega_{2,2+}} A_{M_{1+} \Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} + \theta_{22,2} [A_{N_2 - \Omega_{2,2+}} A_{M_{2+} \Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} + \cdots + \theta_{2m,2} [A_{N_m - \Omega_{2,2+}} A_{M_{m+} \Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} \} \\
&\vdots \\
&+ \theta_\mu \{ \theta_{m1,\mu} [A_{N_1 - \Omega_{\mu,m+}} A_{M_{1+} \Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_\mu} + \theta_{m2,\mu} [A_{N_2 - \Omega_{\mu,m+}} A_{M_{2+} \Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_\mu} + \cdots + \theta_{mm,\mu} [A_{N_m - \Omega_{\mu,m+}} A_{M_{m+} \Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_\mu} \}
\end{aligned} \tag{22}$$

### 3.2 第 2 段階

この後に計算に必要となる次のような添字となる行番号の集合を定義する．このような行番号の集合を用いる理由は，数学的帰納法の仮定を用いるためである．まず， $N$  および  $\Psi$  の元の数が 1 つ少ない集合を  $L$  および  $\Phi$  とする．そのとき，1 つ少なくなった元を加えた  $M$  および  $\Omega$  を  $K$  および  $\Sigma$  とする．たとえば，

$$N = \{1, \dots, m\}, \quad M = \{m+1, \dots, n\} \tag{23}$$

$$\Psi = \{h+1, \dots, h+m\}, \quad \Omega = \{h+m+1, \dots, h+n\} \tag{24}$$

に対して，その 1 つを具体的に表すと，

$$L = \{1, \dots, m-1\}, \quad K = \{m, m+1, \dots, n\} \tag{25}$$

$$\Phi = \{h+1, \dots, h+m-1\}, \quad \Sigma = \{h+m, h+m+1, \dots, h+n\} \tag{26}$$

となる． $L$  と  $\Phi$  の元の数は  $m-1$  であり， $K$  と  $\Sigma$  の元の数は  $n-m+1$  となる．

具体的に  $N$  を考えよう． $N$  から元を 1 個除いた  $L$  の数は  $m$  種類ある． $i$  番目の元を除いた  $L$  を  $L^{(i)}$  と表す．これに対して， $M$  に  $i$  番目の元を加えた集合を  $K^{(i)}$  と表す．たとえば，

$$N_{1-} = L^{(1)}, \quad M_{1-} = K^{(1)} \tag{27}$$

という関係になる．

一方， $s_1$  を  $\Psi_1$  から  $\Omega_1$  に移したときの  $\Phi_1$  と  $\Sigma_1$  をそれぞれ  $\Phi_1^{(1)}$  および  $\Sigma_1^{(1)}$  と表すことにする．他の元を移したときも同様の表現とする．移動した元が明示できない場合はとくに表示しない．そうすると， $\Psi_1, \Omega_1$

と  $\Phi_1^{(1)}, \Sigma_1^{(1)}$  の間には

$$\Psi_{1,i_-} = \Phi_1^{(i)}, \quad \Omega_{1,i_+} = \Sigma_1^{(i)} \quad (28)$$

という関係がある． $\Phi_1^{(i)}$  は， $i = 1$  から  $i = m$  までであるので  $m$  種類ある．同様に  $\Sigma_1^{(i)}$  も  $m$  種類ある．

一方， $\Psi$  から 1 つの元を除いて  $\Phi_1$  になる  $\Psi$  は  $n - m + 1$  種類ある．なぜなら， $\Phi_1$  に加えることができる元は  $n - m + 1$  種類あるからである．その場合， $\Psi_i$  と  $\Omega_i$  の添字  $i$  と  $\Phi_j, \Sigma_j$  の添字  $j$  は必ずしも一致しない．

以上の行集合の記号  $L, K, \Phi_i, \Sigma_i$  の定義を用いて，式 (8) の  $m$  が  $m - 1$  の場合の  $N, M, \Psi_j, \Omega_j$  を表すことができるので，式 (9) の  $m - 1$  の場合を次のように表し，数学的帰納法の仮定によりこの式が成り立つとする．

$$\begin{aligned} A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n} &= \theta_1 A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1} + \theta_2 A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2} + \dots + \theta_m A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}} \\ &= \sum_{i=1}^{\mu_1} \theta_i A_{L^{(m)}\Sigma_i} A_{K^{(m)}\Phi_i} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで， $1 \leq i \leq \mu_1$ ， $\mu_1 = \binom{n}{m-1}$  は  $n$  個から  $m - 1$  個を選ぶ組み合わせの数， $i$  は  $\mu_1$  種類の組み合わせにつけた番号を表す．この  $\Phi_i$  と  $\Psi_j$  は次のような関係にある．すなわち， $\Psi_i$  から 1 つ取り除いてできる集合を  $\Phi_j$  とすると， $j$  を固定した場合，このような  $\Psi_i$  は  $\mu$  のうち  $n - m + 1$  個ある．一方， $\Sigma_j$  と  $\Omega_i$  においても同様の関係がある． $\Omega_i$  を固定したときに， $\Sigma_j$  から 1 つの元を除いて  $\Omega_i$  になる  $\Sigma_j$  の数は  $m$  個ある．なぜなら， $\Omega_i$  に加えることができる元は  $\Psi_i$  の元の  $m$  個のみであり，このうちの 1 つを  $\Omega_i$  に加えれば  $\Sigma_j$  になる．したがって，このような  $\Sigma_j$  は  $m$  種類あることがわかる．

以下の要素交換では，行の入れ替えが行われ行集合  $\Sigma$  や  $\Omega$  の変換が複雑になるので，入れ替わった行集合の添字をここで定義しておこう．まず， $\Sigma$  から 1 つ除いて  $\Omega$  になる場合の添字の定義は次の通りとする． $\Sigma_1$  から  $s_m$  を取り除いた  $\Omega$  を  $\Omega_{1'}$  とする．以下， $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n$  と取り除いた時の  $\Omega$  は  $\Omega_{2'}, \Omega_{3'}, \dots, \Omega_{n-m+1'}$  とする．同様に， $\Sigma_i$  から  $r$  番目の元を除いた  $\Sigma_{i,r_-}$  を次のように表すことにする． $\Phi_i$  に  $r$  番目の元を加えた  $\Phi_{i,r_-}$  も同様に  $\Psi_{1'}$  と表す．

$r$	$m$	$m + 1$	$m + 2$	$\dots$	$n$
$\Sigma_1, \Phi_1$	$\Omega_{1'}, \Psi_{1'}$	$\Omega_{2'}, \Psi_{2'}$	$\Omega_{3'}, \Psi_{2'}$	$\dots$	$\Omega_{n-m+1'}, \Psi_{n-m+1'}$
$\Sigma_2, \Phi_2$	$\Omega_{1''}, \Psi_{1''}$	$\Omega_{2''}, \Psi_{2''}$	$\Omega_{3''}, \Psi_{3''}$	$\dots$	$\Omega_{n-m+1''}, \Psi_{n-m+1''}$
$\Sigma_3, \Phi_3$	$\Omega_{1'''}, \Psi_{1'''}$	$\Omega_{2'''}, \Psi_{1'''}$	$\Omega_{3'''}, \Psi_{1'''}$	$\dots$	$\Omega_{n-m+1'''}, \Psi_{n-m+1'''}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$\Sigma_{\mu_1}, \Phi_{\mu_1}$	$\Omega_{1\mu_1'}, \Psi_{1\mu_1'}$	$\Omega_{2\mu_1'}, \Psi_{2\mu_1'}$	$\Omega_{2\mu_1'}, \Psi_{2\mu_1'}$	$\dots$	$\Omega_{n-m+1\mu_1'}, \Psi_{n-m+1\mu_1'}$

(30)

以上の準備のもとに，式 (29) の右辺の各項に要素交換変換を施す．第 1 項において， $K$  の第 1 番目の行番号を  $L$  に移動することから始める変換は次のようになる．

$$\begin{aligned} &A_{L^{(m)}\Sigma_1^{(m)}} A_{K^{(m)}\Phi_1^{(m)}} \\ &= \theta_{m1,1} [A_{L_{1-m_+}^{(m)}\Sigma_1} A_{K_{m-1_+}^{(m)}\Phi_1}] + \theta_{m2,1} [A_{L_{2-m_+}^{(m)}\Sigma_1} A_{K_{m-2_+}^{(m)}\Phi_1}] + \dots + \theta_{m,m-1,1} [A_{L_{m-1-m_+}^{(m)}\Sigma_1} A_{K_{m-1_+}^{(m)}\Phi_1}] \\ &+ \theta_{mm,1} [A_{L_{m_+}^{(m)}\Sigma_{1,m_-}} A_{K_{m_-}^{(m)}\Phi_{1,m_+}}] + \theta_{m,m+1,1} [A_{L_{m_+}^{(m)}\Sigma_{1,m+1_-}} A_{K_{m_-}^{(m)}\Phi_{1,m+1_+}}] + \dots + \theta_{mn,1} [A_{L_{m_+}^{(m)}\Sigma_{1,n_-}} A_{K_{m_-}^{(m)}\Phi_{1,n_+}}] \\ &= \theta_{m1,1} [A_{N_{1_-}\Sigma_1} A_{M_{1_+}\Phi_1}] + \theta_{m2,1} [A_{N_{2_-}\Sigma_1} A_{M_{2_+}\Phi_1}] + \dots + \theta_{m,m-1,1} [A_{N_{m-1_-}\Sigma_1} A_{M_{m-1_+}\Phi_1}] \\ &+ \theta_{mm,1} [A_{N\Omega_{1'}} A_{M\Psi_{1'}}] + \theta_{m,m+1,1} [A_{N\Omega_{2'}} A_{M\Psi_{2'}}] + \dots + \theta_{mn,1} [A_{N\Omega_{n-m+1'}} A_{M\Psi_{n-m+1'}}] \\ &= \theta_{m1,1} [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}] + \theta_{m2,1} [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}] + \dots + \theta_{m,m-1,1} [A_{L^{(m-1)}\Sigma_1} A_{K^{(m-1)}\Phi_1}] \\ &+ [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}]_{N\Omega_{2'}} + \dots + [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1'}} \end{aligned} \quad (31)$$



この式の変形では以下のことが考慮されている．右辺の各項には  $\theta_{m1,1} = (-1)^{\nu_{m1,1}}$  などの符号係数がつくが，これは本来，式 (9) の変換の際に使われた  $\theta$  と区別して  $\dot{\theta}$  などと表すべきところであるが，表記が煩瑣になるのでここでは省略して  $\theta$  のまま使い，後で同一式内に現れたときにだけ  $\dot{\theta}$  と区別して表すことにする．そうすると，式 (29) の第 1 項の変換は次のようになる．まず，要素交換変換 [2] により，第 1 式第 1 行では  $K^{(m)}$  の  $m$  を左の行列式に移動し，左の行列式の行を  $L^{(m)}$  の 1 から右へ移動して第 1 項となり，続いて  $L^{(m)}$  の 2 を右へ移動して第 2 項となり，順次  $L^{(m)}$  の  $m-1$  を右へ移動して第 1 行の最後の項になる．第 2 行は，今度は  $\Sigma_1^{(m)}$  から移動することになり，最初は  $m$  から始まって第 1 項となり，順次移動して，最後に  $n$  を右に移動して第 2 行の最後の項になることがわかる．第 1 行は  $m-1$ ，第 2 行は  $n-m+1$  項となり，結局，全部で  $n$  項に展開される．また，ここではわかりやすさを考慮して  $\Sigma_1$  を用いているが，任意の  $\Sigma_i$  で成り立つ  $L^{(i)}$  のときには  $K^{(i)}$  の  $i$  番目の行から要素交換変換を始めることに注意しよう．

第 1 式から第 2 式への変形では， $L_{1-m+}^{(m)}$  はもともと  $m$  が足りないところへ左から来た  $m$  が入って 1 が抜けたものであるから，結局  $N$  から第 1 行が欠けた  $N_{1-}$  になる． $K_{m-1+}^{(m)}$  は逆に，第  $m$  行がなくなり第 1 行が加わり  $M_{1+}$  になる． $\Sigma_1^{(m)}$  と  $\Phi_{1,m+}^{(m)}$  は変化しない．以下，右へ移動する行が 2 から  $m-1$  まで変わり，同様に書き換えられる．第 2 式の第 2 行では， $L$  は  $m$  が増えて  $N$  になり，逆に  $K$  は  $m$  が減って  $M$  になる．また  $\Sigma$  から  $\Phi$  へは， $h+m$  から始まり  $h+n$  まで移動して元の数  $1$  ずつ増減してそれぞれ， $\Omega$  から  $\Psi$  へ変わる．ここでは，表 (30) にあるように， $\Sigma^{(m)}$  から  $s_m$  が除かれたものを  $\Omega_{1'}$ ， $\Sigma^{(m)}$  から  $s_{m+1}$  が除かれたものを  $\Omega_{2'}$  と記した．以下順次，同様に名付けて最後は  $\Sigma^{(m)}$  から  $s_n$  が除かれたものを  $\Omega_{n-m+1'}$  と記した．同様に， $\Phi$  に  $s_m, s_{m+1}, \dots, s_n$  が加わったものを  $\Psi_{1'}, \Psi_{2'}, \dots, \Psi_{n-m+1'}$  と記した．このようにして第 2 式の第 2 行が得られる．

第 2 式の左辺と右辺第 2 行の各対積集合の関係には要素交換変換の逆変換により，

$$\theta_{mm,1}[A_{N\Omega_{1'}}, A_{M\Psi_{1'}}]_{L^{(m)}\Sigma_1} = [A_{L^{(m)}\Sigma_1^{(m)}} A_{K^{(m)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} \quad (32)$$

という関係式から成り立つ．他の項についても同様の関係式が成り立つ．これを第 2 式第 2 行に代入したものが第 3 式第 2 行である．大括弧への添字はこの場合は要素交換変換の変換元の行列式積を表す．代入することによって第 2 行の各項の符号係数は消える．第 2 式から第 3 式への変形は第 2 行のみである．

以上のようにして， $A_{L^{(m)}\Sigma_1^{(m)}} A_{K^{(m)}\Phi_1}$  は第 3 式の形に変形できる．次に，式 (29) の第 2 項の  $A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}$  に対して同じ要素交換変換を施す．この場合もやはり右行列式側の  $K^{(m)}$  の第  $m$  行の移動から始める．そうすると，同様の変形により，

$$\begin{aligned} & A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2} \\ &= \theta_{m1,2}[A_{L_{1-m+}^{(m)}\Sigma_2} A_{K_{m-1+}^{(m)}\Phi_2}] + \theta_{m2,2}[A_{L_{2-m+}^{(m)}\Sigma_2} A_{K_{m-2+}^{(m)}\Phi_2}] + \dots + \theta_{m,m-1,2}[A_{L_{m-1-m+}^{(m)}\Sigma_2} A_{K_{m-m-1+}^{(m)}\Phi_2}] \\ &+ \theta_{mm,2}[A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{2,m-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{2,m+}}] + \theta_{m,m+1,2}[A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{2,m+1-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{2,m+1+}}] + \dots + \theta_{mn,2}[A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{2,n-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{2,n+}}] \\ &= \theta_{m1,2}[A_{N_{1-}\Sigma_2} A_{M_{1+}\Phi_2}] + \theta_{m2,2}[A_{N_{2-}\Sigma_2} A_{M_{2+}\Phi_2}] + \dots + \theta_{m,m-1,2}[A_{N_{m-1-}\Sigma_2} A_{M_{m-1+}\Phi_2}] \\ &+ \theta_{mm,2}[A_{N\Omega_{1''}} A_{M\Psi_{1''}}] + \theta_{m,m+1,2}[A_{N\Omega_{2''}} A_{M\Psi_{2''}}] + \dots + \theta_{mn,2}[A_{N\Omega_{n-m+1''}} A_{M\Psi_{n-m+1''}}] \\ &= \theta_{m1,2}[A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}] + \theta_{m2,2}[A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}] + \dots + \theta_{m,m-1,2}[A_{L^{(m-1)}\Sigma_2} A_{K^{(m-1)}\Phi_2}] \\ &+ [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2''}} + \dots + [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1''}} \end{aligned} \quad (33)$$

となる．式 (29) の他の項も同様に要素交換変換によって変形することができる．

特に,  $A_{L^{(m)}\Sigma_\mu} A_{K^{(m)}\Phi_\mu}$  の場合に対しても次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}} \\
&= \theta_{m1,\mu_1} [A_{L_{1-m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K_{m-1+}^{(m)}\Phi_{\mu_1}}] + \theta_{m2,\mu_1} [A_{L_{2-m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K_{m-2+}^{(m)}\Phi_{\mu_1}}] \\
&\quad + \cdots + \theta_{m,m-1,\mu_1} [A_{L_{m-1-m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K_{m-1-1+}^{(m)}\Phi_{\mu_1}}] \\
&+ \theta_{m,m,\mu_1} [A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1,m-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{\mu_1,m+}}] + \theta_{m,m+1,\mu_1} [A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1,m+1-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{\mu_1,m+1+}}] \\
&\quad + \cdots + \theta_{m,n,\mu_1} [A_{L_{m+}^{(m)}\Sigma_{\mu_1,n-}} A_{K_{m-}^{(m)}\Phi_{\mu_1,n+}}] \\
&= \theta_{m1,\mu_1} [A_{N_{1-}\Sigma_{\mu_1}} A_{M_{1+}\Phi_{\mu_1}}] + \theta_{m2,\mu_1} [A_{N_{2-}\Sigma_{\mu_1}} A_{M_{2+}\Phi_{\mu_1}}] + \cdots + \theta_{m,m-1,\mu_1} [A_{N_{m-1-}\Sigma_{\mu_1}} A_{M_{m-1+}\Phi_{\mu_1}}] \\
&+ \theta_{m,m,\mu_1} [A_{N\Omega_{1\mu'_1}} A_{M\Psi_{1\mu'_1}}] + \theta_{m,m+1,\mu_1} [A_{N\Omega_{2\mu'_1}} A_{M\Psi_{2\mu'_1}}] + \cdots + \theta_{m,n,\mu_1} [A_{N\Omega_{n-m+1\mu'_1}} A_{M\Psi_{n-m+1\mu'_1}}] \\
&= [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}] + [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}] + \cdots + [A_{L^{(m-1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m-1)}\Phi_{\mu_1}}] \\
&+ [A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu'_1}} + [A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu'_1}} + \cdots + [A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu'_1}} \quad (34)
\end{aligned}$$

となる.

$A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}$  に同じような要素交換変換を施してみよう. 今度は, 右の行列式の  $K^{(1)}$  から行 1 を左の行列式に移動するところから始まり, 式 (30) と同様に, 次のような  $n$  項の多項式となる.

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1} \\
&= \theta_{12,1} [A_{L_{2-1+}^{(1)}\Sigma_1} A_{K_{1-2+}^{(1)}\Phi_1}] + \theta_{13,1} [A_{L_{3-1+}^{(1)}\Sigma_1} A_{K_{1-3+}^{(1)}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{L_{m-1+}^{(1)}\Sigma_1} A_{K_{1-m+}^{(1)}\Phi_1}] \\
&+ \theta_{1m,1} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{1,m-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{1,m+}}] + \theta_{1,m+1,1} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{1,m+1-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{1,m+1+}}] + \cdots + \theta_{1n,1} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{1,n-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{1,n+}}] \\
&= \theta_{12,1} [A_{N_{2-}\Sigma_1} A_{M_{2+}\Phi_1}] + \theta_{13,1} [A_{N_{3-}\Sigma_1} A_{M_{3+}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{N_{m-}\Sigma_1} A_{M_{m+}\Phi_1}] \\
&+ \theta_{1m,1} [A_{N\Omega_1'} A_{M\Psi_1'}] + \theta_{1,m+1,1} [A_{N\Omega_2'} A_{M\Psi_2'}] + \cdots + \theta_{1n,1} [A_{N\Omega_{n-m+1}'} A_{M\Psi_{n-m+1}'}] \\
&= \theta_{12,1} [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}] + \theta_{13,1} [A_{L^{(3)}\Sigma_1} A_{K^{(3)}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_1'} + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_2'} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1}'} \quad (35)
\end{aligned}$$

同じように,  $A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}$  に対しても要素交換変換を施せば,

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2} \\
&= \theta_{12,2} [A_{L_{2-1+}^{(1)}\Sigma_2} A_{K_{1-2+}^{(1)}\Phi_2}] + \theta_{13,2} [A_{L_{3-1+}^{(1)}\Sigma_2} A_{K_{1-3+}^{(1)}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{L_{m-1+}^{(1)}\Sigma_2} A_{K_{1-m+}^{(1)}\Phi_2}] \\
&+ \theta_{1m,2} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{2,m-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{2,m+}}] + \theta_{1,m+1,2} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{2,m+1-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{2,m+1+}}] + \cdots + \theta_{1n,2} [A_{L_{1+}^{(1)}\Sigma_{2,n-}} A_{K_{1-}^{(1)}\Phi_{2,n+}}] \\
&= \theta_{12,2} [A_{N_{2-}\Sigma_2} A_{M_{2+}\Phi_2}] + \theta_{13,2} [A_{N_{3-}\Sigma_2} A_{M_{3+}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{N_{m-}\Sigma_2} A_{M_{m+}\Phi_2}] \\
&+ \theta_{1m,2} [A_{N\Omega_{1''}} A_{M\Psi_{1''}}] + \theta_{1,m+1,2} [A_{N\Omega_{2''}} A_{M\Psi_{2''}}] + \cdots + \theta_{1n,2} [A_{N\Omega_{n-m+1''}} A_{M\Psi_{n-m+1''}}] \\
&= \theta_{12,2} [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}] + \theta_{13,2} [A_{L^{(3)}\Sigma_2} A_{K^{(3)}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1''}} \quad (36)
\end{aligned}$$

となる.

以上を  $L^{(1)}$  から展開した場合から  $L^{(m)}$  から展開した場合の  $m$  種類について, 各展開式の展開項の  $n$  項に

ついてまとめると次式になる．まず， $L^{(1)}$  から展開した場合は，

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1} \\
&= \theta_{12,1} [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}] + \theta_{13,1} [A_{L^{(3)}\Sigma_1} A_{K^{(3)}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1'}}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2} \\
&= \theta_{12,2} [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}] + \theta_{13,2} [A_{L^{(3)}\Sigma_2} A_{K^{(3)}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1''}}
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3} \\
&= \theta_{12,3} [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}] + \theta_{13,3} [A_{L^{(3)}\Sigma_3} A_{K^{(3)}\Phi_3}] + \cdots + \theta_{1m,3} [A_{L^{(m)}\Sigma_3} A_{K^{(m)}\Phi_3}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1'''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2'''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1'''}}
\end{aligned} \tag{39}$$

⋮

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(1)}\Phi_\mu} \\
&= \theta_{12,\mu_1} [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}] + \theta_{13,\mu_1} [A_{L^{(3)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(3)}\Phi_{\mu_1}}] + \cdots + \theta_{1m,\mu_1} [A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}] \\
&+ [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu'_1}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu'_1}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu'_1}}
\end{aligned} \tag{40}$$

となる．

$L^{(2)}$  についても，

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1} \\
&= \theta_{21,1} [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}] + \theta_{23,1} [A_{L^{(3)}\Sigma_1} A_{K^{(3)}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{2m,1} [A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}] \\
&+ [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1'}}
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2} \\
&= \theta_{21,2} [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}] + \theta_{23,2} [A_{L^{(3)}\Sigma_2} A_{K^{(3)}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{2m,2} [A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}] \\
&+ [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1''}}
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3} \\
&= \theta_{21,3} [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}] + \theta_{23,3} [A_{L^{(3)}\Sigma_3} A_{K^{(3)}\Phi_3}] + \cdots + \theta_{2m,3} [A_{L^{(m)}\Sigma_3} A_{K^{(m)}\Phi_3}] \\
&+ [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1'''}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2'''}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1'''}}
\end{aligned} \tag{43}$$

⋮

$$\begin{aligned}
& A_{L^{(2)}\Sigma_\mu} A_{K^{(2)}\Phi_\mu} \\
&= \theta_{21,\mu_1} [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}] + \theta_{23,\mu_1} [A_{L^{(3)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(3)}\Phi_{\mu_1}}] + \cdots + \theta_{2m,\mu_1} [A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}] \\
&+ [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu'_1}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu'_1}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu'_1}}
\end{aligned} \tag{44}$$

となる．式 (37) との違いは第 1 式の部分で， $L^{(2)}$  の項が欠けているのに対して，式 (37) では  $L^{(1)}$  の項が欠けている点である．式 (32) から式 (34) では  $L^{(m)}$  の項が欠けているというように，系統的に変化していることがわかる．

$L^{(m)}$  についても以下のようなになる .

$$\begin{aligned} & A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1} \\ &= \theta_{m1,1} [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}] + \theta_{m2,1} [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}] + \cdots + \theta_{m,m-1,1} [A_{L^{(m-1)}\Sigma_1} A_{K^{(m-1)}\Phi_1}] \\ &+ [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1'}} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2} \\ &= \theta_{m1,2} [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}] + \theta_{m2,2} [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}] + \cdots + \theta_{m,m-1,1} [A_{L^{(m-1)}\Sigma_2} A_{K^{(m-1)}\Phi_2}] \\ &+ [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1''}} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & A_{L^{(m)}\Sigma_3} A_{K^{(m)}\Phi_3} \\ &= \theta_{m1,3} [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}] + \theta_{m2,3} [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}] + \cdots + \theta_{m,m-1,3} [A_{L^{(m-1)}\Sigma_3} A_{K^{(m-1)}\Phi_3}] \\ &+ [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1'''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2'''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1'''}} \end{aligned} \quad (47)$$

⋮

$$\begin{aligned} & A_{L^{(m)}\Sigma_\mu} A_{K^{(m)}\Phi_\mu} \\ &= \theta_{m1,\mu_1} [A_{L^{(1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(1)}\Phi_\mu}] + \theta_{m2,\mu_1} [A_{L^{(2)}\Sigma_\mu} A_{K^{(2)}\Phi_\mu}] + \cdots + \theta_{m,m-1,\mu_1} [A_{L^{(m-1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(m-1)}\Phi_\mu}] \\ &+ [A_{L^{(1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(1)}\Phi_\mu}]_{N\Omega_{1\mu_1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(1)}\Phi_\mu}]_{N\Omega_{2\mu_1'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_\mu} A_{K^{(1)}\Phi_\mu}]_{N\Omega_{n-m+1\mu_1'}} \end{aligned} \quad (48)$$

以上の式で,  $L^{(i)}$  で展開する式は全部で  $\mu_1$  個あり, 各式には対積が第 1 行に  $m-1$  項, 第 2 行に  $n-m+1$  項展開されている .

ここで, 式 (29) において,  $A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n} = \Xi$  とおき, さらにこの式を  $m=1$  から  $m$  まで総和をとると,

$$m\Xi = \sum_{m=1}^m \sum_{i=1}^{\mu_1} \theta_i A_{L^{(m)}\Sigma_i} A_{K^{(m)}\Phi_i} \quad (49)$$

となる . この式の右辺に式 (37) から式 (48) に示されている  $A_{L^{(m)}\Sigma_i} A_{K^{(m)}\Phi_i}$  の要素交換変換による  $m\mu_1$  個の展開式を代入する . そのとき, 式 (37) から式 (48) に示される各式の最初の  $m-1$  項はすべて相殺されることを以下に示す .

式 (37) の右辺第 1 式の第 1 項は符号を除いて  $[A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]$  である . これと等しい項は式 (41) の左辺である (厳密には左辺が  $[A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]$  の対積を全て含むという意味である .) この式の右辺を見ると, 第 1 式の第 1 項が式 (37) の左辺に等しい . したがって, 要素交換変換の 1 対 1 対応の関係から [2], 次の関係式が成り立つ .

$$[A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{L^{(1)}\Sigma_1} = \theta_{21,1} [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{L^{(2)}\Sigma_1} \quad (50)$$

符号に関しては, 要素交換変換が不对要素である第 1 行と第 2 行の交換であることが式 (35) からわかるので, 間にある不对要素の数  $\nu_{21,1}$  は 0 となり, すなわち  $\theta_{21,1} = 1$  である . なお, 明らかに  $\theta_{21,1} = \theta_{12,1}$  である . 一方, 式 (29) において,  $A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}$  と  $A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}$  は互いに  $L$  と  $K$  の第 1 行と第 2 行を交換した関係にあり, 第 1 行と第 2 行の間の不迫要素の数は 0 であるから, 式 (21) の後の部分で述べた理由により, この 2 つの対積集合の符号は反対でなければならない . したがって, 式 (50) の 2 つの対積の部分集合は式 (49) の右辺で相殺する .

もう 1 つの例として式 (37) の右辺第 1 式の第 2 項を取り上げる . これは符号を除いて  $[A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]$  である . 左辺との関係から

$$[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{L^{(3)}\Sigma_1} = \theta_{13,1} [A_{L^{(3)}\Sigma_1} A_{K^{(3)}\Phi_1}]_{L^{(1)}\Sigma_1} \quad (51)$$

という関係式が成り立つ .  $L^{(3)}$  に関する展開式は記してはいないが,  $[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]$  はその展開式の第 1 項であり, 符号係数は  $\theta_{31,1} = -1$  であることが容易にわかる . したがって, 両方とも展開の係数は  $-1$  であり,

式 (51) を  $L^{(3)}$  に関する展開式の第 1 項に代入すれば，その項の符号は + になり，式 (37) の第 2 項とは異符号となる．一方，式 (29) の  $A_{L^{(1)}\Sigma_1}A_{K^{(1)}\Phi_1}$  と  $A_{L^{(3)}\Sigma_1}A_{K^{(3)}\Phi_1}$  は，互いに  $L$  と  $K$  の第 1 行と第 3 行を交換した関係にあり，式 (21) の後の部分で述べた理由により，今度は同符号となることがわかる．したがって，式 (37) の右辺第 1 式の第 2 項は相殺されて消えることがわかる．

式 (37) から式 (48) の各式の第 1 行すなわち最初の  $m - 1$  項の全ての項が式 (49) の右辺において相殺することは以下のようにして示すことができる．この場合の考え方は，第 1 段階で式 (12) から式 (17) まですべて式 (9) の形式で総和をとったときに，それぞれの式の後半の  $n - m$  項がすべて相殺することを示した場合と同じである．

式 (29) において， $L^{(i)}$  から展開した式の組を  $L^{(i)}$  組と呼ぶことにする．このような組は全部で  $m$  組存在する．また，各組は  $\Sigma_1$  の式から  $\Sigma_{\mu_1}$  の式まで  $\mu_1$  個の式からなる．いま，そのような式の中の最初の  $m - 1$  項の中から任意の項を取り上げよう．この項は  $L^{(i)}$  組の  $\Sigma_k$  の式にあり添字が  $L^{(j)}$  としよう．式 (37) 以下から明らかなように，各組で展開した式の項は自分の組以外の  $m - 1$  個の  $L^{(i)}$  を添字にもつ対積集合であるから  $L^{(j)}$  は  $L^{(i)}$  以外である．添字  $L^{(j)}$  の項は  $L^{(i)}$  組の展開項の中に必ず存在する．また，その項の  $\Sigma_k$  の添字は 1 から  $\mu_1$  までのいずれかであるから，その  $L^{(j)}$  組のいずれかの式の左辺と一致する（部分集合となっている）．その式の右辺には， $\Sigma_k$  が同じであるから，最初に取り上げた組と等しい  $L^{(i)}$  の項が必ず存在する．すなわち，その項が最初に取り上げた項と符号を除いて等しい項である．その項の符号係数が負ならば，一方の式 (50) と同等の関係式を代入することにより異符号になり，その場合は式 (49) の右辺に代入したときに式 (37) の左辺の係数が同符号になるので相殺する．一方，符号係数が正ならば，左辺の係数が式 (37) で異符号なるのでこの場合も相殺する．ここで述べたことから明らかなように，一致する項までの選択は全て一意的であったから全ての項は対を作り，全ての対は独立している．したがって，全ての  $L^{(i)}$  の全ての  $\Sigma_k$  の式を式 (49) の右辺に代入したとき，それぞれの式の最初の  $m - 1$  項は全て対を作り互いに相殺することが示されたことになる．

### 3.3 第 3 段階

式 (37) など  $L^{(i)}$  による展開式において，最初の  $m - 1$  項は総和されたときに全て相殺されることが示された．したがって，以下では式 (37) から式 (48) の各式では最初の  $m - 1$  項は除いて考えることにしよう．これらの式を，最初の  $m - 1$  項を除いた形でもう一度示すと以下ようになる．式の左辺で「'」を付けたのは最初の  $m - 1$  項を取り除いた項という意味で総和された時になくなるものである．

まず， $L^{(1)}$  から展開した式は，

$$A_{L^{(1)}\Sigma_1}A_{K^{(1)}\Phi_1}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_1}A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_1}A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_1}A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1}'} \quad (52)$$

$$A_{L^{(1)}\Sigma_2}A_{K^{(1)}\Phi_2}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_2}A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1}''} + [A_{L^{(1)}\Sigma_2}A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2}''} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_2}A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1}''} \quad (53)$$

$$A_{L^{(1)}\Sigma_3}A_{K^{(1)}\Phi_3}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_3}A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1}'''} + [A_{L^{(1)}\Sigma_3}A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2}'''} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_3}A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1}'''} \quad (54)$$

⋮

$$A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}}A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}}A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu_1}'} + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}}A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu_1}'} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}}A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu_1}'} \quad (55)$$



$L^{(2)}$  から展開した式は ,

$$A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}' = [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_1} + [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_2} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_1} A_{K^{(2)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1}} \quad (56)$$

$$A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}' = [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_2} A_{K^{(2)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1}'} \quad (57)$$

$$A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}' = [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_3} A_{K^{(2)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1}''} \quad (58)$$

⋮

$$A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}' = [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu_1'}} + [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu_1'}} + \cdots + [A_{L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(2)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu_1}'} \quad (59)$$

$L^{(m)}$  から展開した式は次の通りである .

$$A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_1} + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_2} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{N\Omega_{n-m+1}} \quad (60)$$

$$A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{2'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_2} A_{K^{(1)}\Phi_2}]_{N\Omega_{n-m+1}'} \quad (61)$$

$$A_{L^{(m)}\Sigma_3} A_{K^{(m)}\Phi_3}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{1''}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{2''}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_3} A_{K^{(1)}\Phi_3}]_{N\Omega_{n-m+1}''} \quad (62)$$

⋮

$$A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}}' = [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{1\mu_1'}} + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{2\mu_1'}} + \cdots + [A_{L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(1)}\Phi_{\mu_1}}]_{N\Omega_{n-m+1\mu_1}'} \quad (63)$$

ここで , 式 (22) を  $N_{1-} = L^{(1)}$  や  $M_{1+} = K^{(1)}$  などの関係を用いて次のように表す .

$mX$

$$\begin{aligned} &= \theta_1 \{ \theta_{11,1} [A_{L^{(1)}\Omega_{1,1+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} + \theta_{12,1} [A_{L^{(2)}\Omega_{1,1+}} A_{K^{(2)}\Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{1m,1} [A_{L^{(m)}\Omega_{1,1+}} A_{K^{(m)}\Psi_{1,1-}}]_{\Omega_1} \} \\ &+ \theta_1 \{ \theta_{21,1} [A_{L^{(1)}\Omega_{1,2+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} + \theta_{22,1} [A_{L^{(2)}\Omega_{1,2+}} A_{K^{(2)}\Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{2m,1} [A_{L^{(m)}\Omega_{1,2+}} A_{K^{(m)}\Psi_{1,2-}}]_{\Omega_1} \} \\ &\quad \vdots \\ &+ \theta_1 \{ \theta_{m1,1} [A_{L^{(1)}\Omega_{1,m+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} + \theta_{m2,1} [A_{L^{(2)}\Omega_{1,m+}} A_{K^{(2)}\Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} + \cdots + \theta_{mm,1} [A_{L^{(m)}\Omega_{1,m+}} A_{K^{(m)}\Psi_{1,m-}}]_{\Omega_1} \} \\ &+ \theta_2 \{ \theta_{11,2} [A_{L^{(1)}\Omega_{2,1+}} A_{K^{(1)}\Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} + \theta_{12,2} [A_{L^{(2)}\Omega_{2,1+}} A_{K^{(2)}\Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} + \cdots + \theta_{1m,2} [A_{L^{(m)}\Omega_{2,1+}} A_{K^{(m)}\Psi_{2,1-}}]_{\Omega_2} \} \\ &+ \theta_2 \{ \theta_{21,2} [A_{L^{(1)}\Omega_{2,2+}} A_{K^{(1)}\Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} + \theta_{22,2} [A_{L^{(2)}\Omega_{2,2+}} A_{K^{(2)}\Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} + \cdots + \theta_{2m,2} [A_{L^{(m)}\Omega_{2,2+}} A_{K^{(m)}\Psi_{2,2-}}]_{\Omega_2} \} \\ &\quad \vdots \\ &+ \theta_2 \{ \theta_{m1,2} [A_{L^{(1)}\Omega_{2,m+}} A_{K^{(1)}\Psi_{2,m-}}]_{\Omega_2} + \theta_{m2,2} [A_{L^{(2)}\Omega_{2,m+}} A_{K^{(2)}\Psi_{2,m-}}]_{\Omega_2} + \cdots + \theta_{mm,2} [A_{L^{(m)}\Omega_{2,m+}} A_{K^{(m)}\Psi_{2,m-}}]_{\Omega_2} \} \\ &\quad \vdots \\ &+ \theta_{\mu} \{ \theta_{11,\mu} [A_{L^{(1)}\Omega_{\mu,1+}} A_{K^{(1)}\Psi_{\mu,1-}}]_{\Omega_{\mu}} + \theta_{12,\mu} [A_{L^{(2)}\Omega_{\mu,1+}} A_{K^{(2)}\Psi_{\mu,1-}}]_{\Omega_{\mu}} + \cdots + \theta_{1m,\mu} [A_{L^{(m)}\Omega_{\mu,1+}} A_{K^{(m)}\Psi_{\mu,1-}}]_{\Omega_{\mu}} \} \\ &+ \theta_{\mu} \{ \theta_{21,\mu} [A_{L^{(1)}\Omega_{\mu,2+}} A_{K^{(1)}\Psi_{\mu,2-}}]_{\Omega_{\mu}} + \theta_{22,\mu} [A_{L^{(2)}\Omega_{\mu,2+}} A_{K^{(2)}\Psi_{\mu,2-}}]_{\Omega_{\mu}} + \cdots + \theta_{2m,\mu} [A_{L^{(m)}\Omega_{\mu,2+}} A_{K^{(m)}\Psi_{\mu,2-}}]_{\Omega_{\mu}} \} \\ &\quad \vdots \\ &+ \theta_{\mu} \{ \theta_{m1,\mu} [A_{L^{(1)}\Omega_{\mu,m+}} A_{K^{(1)}\Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_{\mu}} + \theta_{m2,\mu} [A_{L^{(2)}\Omega_{\mu,m+}} A_{K^{(2)}\Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_{\mu}} + \cdots + \theta_{mm,\mu} [A_{L^{(m)}\Omega_{\mu,m+}} A_{K^{(m)}\Psi_{\mu,m-}}]_{\Omega_{\mu}} \} \end{aligned} \quad (64)$$

さて , ここから , 式 (52) から式 (63) に式 (49) の符号を掛けて加えた右辺の和が式 (64) の右辺に等しいことを示す . 最初に , 式 (52) から式 (63) の右辺の各項が式 (64) の右辺のいずれかの項と符号を除いて重複なく等しいことを示す .

まず、式 (52) において、右辺の  $L^{(1)}\Sigma_1$  は、符号を除いて式 (64) の各行の第 1 項のうちのいずれかに等しい。なぜなら、 $\Sigma_1$  から 1 つの元を取った行集合は  $\Omega_i$  のいずれかでなければならず、 $\Sigma_1$  から取られた 1 つの元はその  $\Omega_i$  に含まれない  $m$  個の元の 1 つであり、そのような元とその  $\Omega_i$  の組み合わせは式 (64) の各行の第 1 項で全て網羅している。すなわち、 $\Sigma_1$  からたとえ第 1 行 (つまり  $s_m$ ) を除いた集合は  $\Omega_i$  のいずれかであり、それは各行第 1 項のいずれかにあり、かつその  $\Omega_i$  の式には第 1 行を加える場合から第  $m$  行を加える場合まで可能な  $m$  種類の全てがあるので  $s_m$  を加えた集合はそのうちの 1 つでなければならない。つまり  $\Sigma_1$  と一致する。これは式 (52) 右辺の第 2 項の第 2 行 (つまり  $s_{m+1}$ ) を除いた場合でも同様である。結局、式 (52) の  $L^{(1)}\Sigma_1$  各項は式 (64) の各行の第 1 項の中のいずれかと一致する。

式 (52) には  $n - m + 1$  個の  $[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]$  があり、それぞれの変換元は  $N\Omega_{r'}$  ( $r = 1, \dots, n - m + 1$ ) すなわち  $[A_{N\Omega_{r'}} A_{M\Psi_{r'}}]$  である。式 (64) の右辺の各式第 1 項でこの  $L^{(1)}\Sigma_1$  に一致する項は  $n - m + 1$  個ある。なぜなら、1 個の元を加えて  $\Sigma_1$  になる  $\Omega$  の種類とは、すなわち、 $\Sigma_1$  から元を 1 個取り出すときの取り出し方の種類であり、それは  $\Sigma_1$  の数  $n - m + 1$  個だけあるからである。これは表 (30) の定義そのものであるから、したがって、式 (64) において、 $L^{(1)}\Sigma_1$  と一致する  $L^{(1)}\Omega_{r',i_+}$  項の変換元  $\Omega_r$  は  $\Omega_{r'}$  ( $r = 1, \dots, n - m + 1$ ) でなければならない。

次に、式 (53) を考えてみよう。今度は  $L^{(1)}\Sigma_2$  であるから、 $\Sigma_2$  から元を 1 つ取り除いたものは表 (30) の  $\Omega_{r''}$  ( $r = 1, \dots, n - m + 1$ ) になる。また、 $L^{(1)}\Sigma_2$  と一致する項は式 (64) の右辺の各式第 1 項の中にあり、この  $n - m + 1$  個の  $\Omega_{r''}$  を変換元とする  $L^{(1)}\Omega_{r'',i_+}$  のうちの 1 つでなければならない。なぜなら、 $\Sigma_2$  から 1 個取り除いて  $\Omega_{r''}$  になったのであるから、取り除いた 1 個は  $\Omega_{r''}$  に含まれない  $m$  個の中になければならず、式 (64) の中の  $L^{(1)}\Omega_{r'',i_+}$  の  $i$  の範囲 ( $i = 1$  から  $m$  まで) に含まれるからである。このようにして、 $L^{(1)}\Sigma_2$  と一致する項は式 (64) の各行第 1 項の中に  $n - m + 1$  個あることがわかる。その変換元は  $\Omega_{r''}$  ( $r = 1, \dots, n - m + 1$ ) である。したがって、この  $n - m + 1$  項は式 (53) の右辺の  $n - m + 1$  項に等しい。ここで一致した  $n - m + 1$  個とその前に  $L^{(1)}\Sigma_1$  と一致した  $n - m + 1$  個の間に重複がないことは明らかである。

この後、同様にして、 $L^{(1)}\Sigma_3$  から  $L^{(1)}\Sigma_{\mu_1}$  までの項の 1 対 1 の一致関係が得られる。さらに、式 (64) の各式の第 2 行に関して  $L^{(2)}\Sigma_1$  から  $L^{(2)}\Sigma_{\mu_1}$  までの 1 対 1 の一致関係が得られる。以下、同様にして  $L^{(m)}\Sigma_1$  から  $L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}$  まで互いに一致する項を 1 対 1 に関係付けることができる。また、式 (52) から式 (63) の右辺の項の数は  $(n - m + 1)m\mu_1$  であり、一方、式 (64) の右辺の項は  $m^2\mu$  である。ここで、

$$m\mu = \frac{mn!}{(n-m)!m!} = \frac{(n-m+1)n!}{(n-m+1)!(m-1)!} = (n-m+1)\mu_1 \quad (65)$$

という関係があるから、両者は一致する。以上により、式 (52) から式 (63) まで右辺の全ての項が式 (64) の右辺の全ての項と符号を除いて一致することが示されたことになる。

次に各項の符号を考えてみよう。式 (52) に着目すると、右辺は  $n - m + 1$  項からなり、それぞれが  $\Omega_{i'}$  ( $i = 1, \dots, n - m + 1$ ) から変換された  $A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}$  の対積の部分集合であることがわかる。この各項に符号を除いて一致する項が式 (64) の各行の第 1 項にある。仮に式 (52) 右辺第 1 項の  $[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{\Omega_{i'}}$  が  $[A_{L^{(1)}\Omega_{1,m_+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,m_-}}]_{\Omega_1}$  に一致したとしよう。その 1 つの符号を見ると、 $\theta_1\theta_{m1,1}$  であることがわかる。このうち、 $\theta_{m1,1}$  は  $N\Omega_1$  から  $L^{(1)}\Omega_{1,m_+}$  へ要素交換変換されたときの符号である。一方、 $\theta_1$  は  $A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n}$  から  $N\Omega_1$  へ要素交換変換されたときの符号である。つまり、 $\theta_1\theta_{m1,1}$  は  $A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n}$  から  $L^{(1)}\Omega_{1,m_+}$  へ、すなわち、 $A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n}$  から  $[A_{L^{(1)}\Omega_{1,m_+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,m_-}}]_{\Omega_1}$  へ要素交換変換されたときの符号であることがわかる。ところで、 $[A_{L^{(1)}\Omega_{1,m_+}} A_{K^{(1)}\Psi_{1,m_-}}]_{\Omega_1}$  は  $[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{\Omega_{i'}}$  に等しいものであった。ということは、 $\theta_1\theta_{m1,1}$  は  $A_{12\dots n} A_{h+1,h+2,\dots,h+n}$  から  $[A_{L^{(1)}\Sigma_1} A_{K^{(1)}\Phi_1}]_{\Omega_{i'}}$  に要素交換変換されたときの符号でもあるということである。このことは、定義により、 $\theta_1\theta_{m1,1}$  が  $\hat{\theta}_1$  に等しいことを示す。すなわち、

$$\theta_1\theta_{m1,1} = \hat{\theta}_1 \quad (66)$$

である。

式 (52) の右辺第 2 項以降についても同じことが成り立つ．実際，第 2 項以降では第 1 項と変換元の対積集合が  $N\Omega_{1'}$  から  $N\Omega_{2'}$  に替わるが，変換元は替わるものの変換先は  $L^{(1)}\Sigma_1$  のまま変わらない．つまり，式 (65) の右辺は変わるが左辺は変わらないということである．その結果，式 (52) の右辺の  $n - m + 1$  項と符号を除いて一致する式 (64) の各行の第 1 項の中の  $n - m + 1$  項は符号が全て  $\dot{\theta}_1$  同じになり，式 (52) の右辺に  $\dot{\theta}_1$  を掛けたものと一致することになる．すなわち，式 (52) の右辺に符号係数  $\dot{\theta}_1$  が掛けたものが式 (64) の右辺の  $n - m + 1$  項を置き換えることができるということになる．すなわち，式 (64) の右辺の  $n - m + 1$  項は式 (52) の左辺に  $\dot{\theta}_1$  を掛けたもので置き換えられることになる．

式 (53) の右辺に関しても同様のことが成り立つ．この式では  $L^{(1)}\Sigma_2$  の対積集合を変換元ごとに  $n - m + 1$  項で表している．これらの  $n - m + 1$  項は，式 (64) の各行の第 1 項の中の同じ数の項に 1 対 1 で一致する．各項は上で示した場合と同じように， $L^{(1)}\Sigma_2$  が  $A_{12\dots n}A_{h+1,h+2,\dots,h+n}$  に変換されるときに符号係数を持つことになり，したがって全て同じ  $\dot{\theta}_2$  を係数を持つ．その結果，式 (64) の  $L^{(1)}\Sigma_2$  と一致する  $n - m + 1$  項は式 (53) の左辺に  $\dot{\theta}_2$  を掛けたもので置き換えることができるということがわかる．

式 (54) 以下も同様にして式 (64) の中の  $L^{(1)}\Sigma_3$  に由来する  $n - m + 1$  項は左辺に  $\dot{\theta}_3$  を掛けたものに等しく，さらに， $L^{(1)}\Sigma_4$  から  $L^{(1)}\Sigma_\mu$  まで，それぞれに由来する  $n - m + 1$  項は展開する元の式に  $\dot{\theta}_4$  から  $\dot{\theta}_\mu$  を掛けたものに等しいことがわかる．式 (64) の各行第 1 項にある  $L^{(1)}$  を添字にもつ項は全部で  $m\mu$  個ある．このとき，式 (66) が成り立つから，式 (64) の各行第 1 項で置き換えられる  $n - m + 1$  項の組は全部で  $\mu_1$  組あることになる．この数は式 (52) から式 (55) まで  $A_{L^{(1)}\Sigma_i}A_{K^{(1)}\Phi_i}$  の数に等しい．したがって，式 (64) の各行第 1 項の全体は

$$\sum_{i=1}^{\mu_1} \dot{\theta}_i A_{L^{(1)}\Sigma_i} A_{K^{(1)}\Phi_i} \quad (67)$$

に等しい．このことは，式 (64) の各行第  $i$  項にある  $L^{(i)}$  を添字にもつ項についても同様に成り立つ．したがって，式 (64) は最終的に

$$mX = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\mu_1} \dot{\theta}_i A_{L^{(j)}\Sigma_i} A_{K^{(j)}\Phi_i} \quad (68)$$

となる．この式と式 (49) を比較することにより，

$$X = \Xi \quad (69)$$

が成り立つ． $X$  は式 (9) の左辺であり， $\Xi$  は式 (29) の左辺であったから，

$$\begin{aligned} A_{12\dots n}A_{h+1,h+2,\dots,h+n} &= \theta_1 A_{L^{(m)}\Sigma_1} A_{K^{(m)}\Phi_1} + \theta_2 A_{L^{(m)}\Sigma_2} A_{K^{(m)}\Phi_2} + \cdots + \theta_m A_{L^{(m)}\Sigma_{\mu_1}} A_{K^{(m)}\Phi_{\mu_1}} \\ &= \sum_{i=1}^{\mu_1} \theta_i A_{L^{(m)}\Sigma_i} A_{K^{(m)}\Phi_i} \end{aligned} \quad (70)$$

が成り立つ．すなわち，式 (9) の定理が一般に成り立つことが示された．

## 4 具体的例

$n = 4$  ,  $m = 2$  の場合を考えてみよう．このとき，

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2\}, \quad M = \{3, 4\} \\ \Psi_1 &= \{h + 1, h + 2\}, \quad \Psi_2 = \{h + 1, h + 3\}, \quad \Psi_3 = \{h + 1, h + 4\}, \\ \Psi_4 &= \{h + 2, h + 3\}, \quad \Psi_5 = \{h + 2, h + 4\}, \quad \Psi_6 = \{h + 3, h + 4\} \\ \Omega_1 &= \{h + 3, h + 4\}, \quad \Omega_2 = \{h + 2, h + 4\}, \quad \Omega_3 = \{h + 2, h + 3\}, \\ \Omega_4 &= \{h + 1, h + 4\}, \quad \Omega_5 = \{h + 1, h + 3\}, \quad \Omega_6 = \{h + 1, h + 2\} \end{aligned}$$

である．符号は，

$N$  と  $\Psi_1$  の交換は 1 と  $h+1$  で不对要素が 3 個，2 と  $h+2$  で不对要素が 3 個，合計 6 個で符号は +，  
 $N$  と  $\Psi_2$  の交換は 1 と  $h+1$  で不对要素が 3 個，2 と  $h+3$  で不对要素が 4 個，合計 7 個で符号は -，  
 $N$  と  $\Psi_3$  の交換は 1 と  $h+1$  で不对要素が 3 個，2 と  $h+4$  で不对要素が 5 個，合計 8 個で符号は +，  
 $N$  と  $\Psi_4$  の交換は 1 と  $h+2$  で不对要素が 4 個，2 と  $h+3$  で不对要素が 4 個，合計 8 個で符号は +，  
 $N$  と  $\Psi_5$  の交換は 1 と  $h+2$  で不对要素が 4 個，2 と  $h+4$  で不对要素が 5 個，合計 9 個で符号は -，  
 $N$  と  $\Psi_6$  の交換は 1 と  $h+3$  で不对要素が 5 個，2 と  $h+4$  で不对要素が 5 個，合計 10 個で符号は +  
となる．結局，式 (9) から，

$$A_{12,h+1,h+2} A_{34,h+3,h+4} - A_{12,h+1,h+3} A_{34,h+2,h+4} + A_{12,h+1,h+4} A_{34,h+2,h+3} + A_{12,h+2,h+3} A_{34,h+1,h+4} \\ - A_{12,h+2,h+4} A_{34,h+1,h+3} + A_{12,h+3,h+4} A_{34,h+1,h+2} = A_{1234} A_{h+1,h+2,h+3,h+4}$$

となる．あるいは， $h+1 = \alpha$ ， $h+2 = \beta$ ， $h+3 = \gamma$ ， $h+4 = \delta$  と書くと，

$$A_{12\alpha\beta} A_{34\gamma\delta} - A_{12\alpha\gamma} A_{34\beta\delta} + A_{12\alpha\delta} A_{34\beta\gamma} + A_{12\beta\gamma} A_{34\alpha\delta} - A_{12\beta\delta} A_{34\alpha\gamma} + A_{12\gamma\delta} A_{34\alpha\beta} = A_{1234} A_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

となる．これはすでに述べた定理 [4] である．

## 参考文献

- [1] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 1」(2021/1/31 のエントリー)．  
[http://totoha.web.fc2.com/det\\_prod\\_theory.pdf](http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf)
- [2] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 2」(2021/2/26 のエントリー)．  
[http://totoha.web.fc2.com/det\\_prod\\_theory-2.pdf](http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-2.pdf)
- [3] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 3」(2021/3/1 のエントリー)．  
[http://totoha.web.fc2.com/det\\_prod\\_theory-3.pdf](http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-3.pdf)
- [4] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 4」(2021/6/10 のエントリー)．  
[http://totoha.web.fc2.com/det\\_prod\\_theory-4.pdf](http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-4.pdf)