

1つの行列から派生する行列式の積に関する定理の系

2022.4.2 鈴木 実

1 はじめに

1組の同一行を有する2つの行列式の積において、それぞれの行列式の間で残りの1組の行から決まった数の行を交換することで2つの行列式の積が得られる。このようにして得られる行列式の積は複数ある。これらの行列式の積と元の行列式の積の間には一定の関係式が成り立つ [1, 2, 3, 4, 5]。行列式は転置しても値は変わらないから、列を交換する場合も同様の関係式が成り立つ。これらの関係式は、積を作る2つの行列式の間で1回に交換する行の数と交換される行全部の数によって変わる。これらの行列式を定義する時に、これまで述べた定理においては、行列式のもとになる行列の $2n$ 個の行から欠けている行を指定する。では、 $2n$ 個の行のうち、欠けていないもの、すなわち行列式に含まれる行を示して行列式を表した場合、これらの定理の関係式はどのように変化するだろうか。実は、関係式は全く同じままで良い。このことを以下に定理の系として説明する。

2 定理

2.1 定理1 除かれる行による表示

$h+2$ 行 h 列の行列 A において、第 i 行と第 j 行を除いてできる h 次行列式を A_{ij} と表すとき、

$$A_{im}A_{jn} - A_{in}A_{jm} = A_{ij}A_{mn} \quad (1)$$

が成り立つ。行と列を入れ替えた h 行 $h+2$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ。

系1 (含まれる行による表示)

$h+2$ 行 h 列の行列 A において、第 i, j, m, n 行の4行のうち第 i 行と第 m 行を残して他の行を除いてできる h 次行列式を A_{im} と表す。すなわち、 A_{im} は上記4行のうち第 i 行と第 m 行のみを含む。 A_{jn}, A_{in}, A_{ij} なども同様に定義するとき、

$$A_{im}A_{jn} - A_{in}A_{jm} = A_{ij}A_{mn} \quad (2)$$

が成り立つ。この式は式(1)と形式の上で同じである。行と列を入れ替えた h 行 $h+2$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ。

証明

式(1)において、左辺第1項の A_{im} は第 i, j, m, n 行の4行のうち第 i 行と第 m 行が欠けているから第 j 行と第 n 行が含まれる。したがって、系1の定義では A_{jn} である。同様に、式(1)左辺第1項の A_{jn} は系1の定義では A_{im} である。したがって、式(1)左辺第1項は系1の定義では $A_{jn}A_{im}$ である。式(1)左辺第2項と

式 (1) 右辺においても同様にして系 1 の定義では, それぞれ, $A_{jm}A_{in}$ および $A_{mn}A_{ij}$ である. 結局, 式 (1) は系 1 の定義では

$$A_{jn}A_{im} - A_{jm}A_{in} = A_{mn}A_{ij}$$

であることがわかる. すなわち, これは式 (2) である.

2.2 定理 2

$h+3$ 行 h 列の行列 A において, 第 i 行, 第 j 行, 第 k 行を除いてできる h 次行列式を A_{ijk} と表し, i, j, k, l, m, n を昇順の行番号とすると,

$$A_{jkn} A_{ilm} - A_{ikn} A_{jlm} + A_{ijn} A_{klm} = A_{ijk} A_{lmn} \quad (3)$$

が成り立つ. 行と列を入れ替えた h 行 $h+3$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ.

系 2

$h+3$ 行 h 列の行列 A において, 第 i, j, k 行および第 l, m, n 行の 6 行のうち第 j, k, n の 3 行を残して他の行を除いてできる h 次行列式を A_{jkn} と表す. $A_{ilm}, A_{ikn}, A_{jlm}$ など同様に定義するとき,

$$A_{jkn} A_{ilm} - A_{ikn} A_{jlm} + A_{ijn} A_{klm} = A_{ijk} A_{lmn} \quad (4)$$

が成り立つ. 行と列を入れ替えた h 行 $h+3$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ.

証明

式 (3) において, 左辺第 1 項の A_{jkn} には第 i, j, k, l, m, n 行の 6 行のうち第 j, k, n 行が欠けているのであるから第 i, l, m 行は含まれている. したがって, 式 (3) の A_{jkn} は系 2 の定義では A_{ilm} に等しい. 同様に, 左辺第 1 項の A_{ilm} は系 2 の定義では A_{jkn} に等しい. これから, 式 (3) 左辺の第 1 項は系 2 の定義において $A_{ilm} A_{jkn}$ に等しい. これは式 (4) の第 1 項に等しい. 同様に式 (3) の第 2 項以降および右辺も式 (4) の対応する項に等しい. つまり, 式 (3) は系 2 の定義において次式になる.

$$A_{ilm} A_{jkn} - A_{jlm} A_{ikn} + A_{klm} A_{ijn} = A_{lmn} A_{ijk}$$

これは式 (4) に一致する.

3 定理 3

$h+n$ 行 h 列の行列 A において, 第 i_2, i_3, \dots, i_n 行, および第 j_n 行を除いてできる h 次行列式を $A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n}$ と表す. 他の $A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ や $A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n}$ など同様である. $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n$ を相異なる昇順の行番号とすると,

$$\begin{aligned} & A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n} A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} - A_{i_1, i_3, \dots, i_n, j_n} A_{i_2, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} + A_{i_1, i_2, i_4, \dots, i_n, j_n} A_{i_3, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} \\ & + \dots + (-1)^{n-1} A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n} A_{i_n, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} = A_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \end{aligned} \quad (5)$$

が成り立つ. 行と列を入れ替えた h 行 $h+n$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ.

系 3

$h+n$ 行 h 列の行列 A において, 第 i_1, i_2, \dots, i_n 行, および第 j_1, j_2, \dots, j_n 行の $2n$ 行のうち第 i_2, i_3, \dots, i_n 行, および第 j_n 行の n 行を残しその他の n 行を除いて得られる h 次行列式を $A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n}$ と表す. $A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}, A_{i_1, i_3, \dots, i_n, j_n}, A_{i_2, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ など同様に定義するとき,

$$A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n} A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} - A_{i_1, i_3, \dots, i_n, j_n} A_{i_2, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} + A_{i_1, i_2, i_4, \dots, i_n, j_n} A_{i_3, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n} A_{i_n, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} = A_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (6)$$

が成り立つ. 行と列を入れ替えた h 行 $h+n$ 列の行列においても同様の関係式が成り立つ.

証明

式 (5) 第 1 項の行列式 $A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n}$ では, A の第 i_2, i_3, \dots, i_n 行, および第 j_n 行が欠けているのであるから, 第 i_1 行, および第 j_1, j_2, \dots, j_{n-1} 行は含まれる. すなわち, この行列式は系 3 の定義の $A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ であることがわかる. さらに, 同じ項の $A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}$ は同様にして系 3 の定義の $A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n}$ に等しい. 式 (5) の第 2 項以降についても同様の関係が成り立つ. すなわち, 式 (5) は

$$A_{i_1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} A_{i_2, i_3, \dots, i_n, j_n} - A_{i_2, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} A_{i_1, i_3, \dots, i_n, j_n} + A_{i_3, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} A_{i_1, i_2, i_4, \dots, i_n, j_n} + \dots + (-1)^{n-1} A_{i_n, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}} A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n} = A_{j_1, j_2, \dots, j_n} A_{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

となる. これは式 (6) に等しい.

4 定理 4

$h+4$ 行 h 列の行列 A において, 第 i_1 行, 第 i_2 行と第 j_3 行, 第 j_4 行を除いてできる h 次行列式を $A_{i_1 i_2 j_3 j_4}$ のように表す. $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4$ を相異なる昇順の行番号とし, それ以外の $h-4$ 行を 2 つの行列式に共通とするとき,

$$A_{i_1 i_2 j_1 j_2} A_{i_3 i_4 j_3 j_4} - A_{i_1 i_2 j_1 j_3} A_{i_3 i_4 j_2 j_4} + A_{i_1 i_2 j_1 j_4} A_{i_3 i_4 j_2 j_3} + A_{i_1 i_2 j_2 j_3} A_{i_3 i_4 j_1 j_4} - A_{i_1 i_2 j_2 j_4} A_{i_3 i_4 j_1 j_3} + A_{i_1 i_2 j_3 j_4} A_{i_3 i_4 j_1 j_2} = A_{i_1 i_2 i_3 i_4} A_{j_1 j_2 j_3 j_4} \quad (7)$$

が成り立つ. 行列式であるから, 以上の関係式は行と列を入れ替えても同じ式が成り立つ.

系 4

$h+4$ 行 h 列の行列 A において, $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4$ を相異なる昇順の行番号とする. この 8 行のうち, 第 i_1, i_2 , 第 j_3, j_4 行を残し, それ以外の 4 行を除いてできる行列式を $A_{i_1 i_2 j_3 j_4}$ と表す. 他の行列式についても同様に定義するとき,

$$A_{i_1 i_2 j_1 j_2} A_{i_3 i_4 j_3 j_4} - A_{i_1 i_2 j_1 j_3} A_{i_3 i_4 j_2 j_4} + A_{i_1 i_2 j_1 j_4} A_{i_3 i_4 j_2 j_3} + A_{i_1 i_2 j_2 j_3} A_{i_3 i_4 j_1 j_4} - A_{i_1 i_2 j_2 j_4} A_{i_3 i_4 j_1 j_3} + A_{i_1 i_2 j_3 j_4} A_{i_3 i_4 j_1 j_2} = A_{i_1 i_2 i_3 i_4} A_{j_1 j_2 j_3 j_4} \quad (8)$$

が成り立つ. 行列式であるから, 以上の関係式は行と列を入れ替えても同じ式が成り立つ.

証明

証明は系 1, 系 2, および系 3 と同様である. 式 (7) 左辺の第 1 項の行列式 $A_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ では第 $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4$ 行のうち, 第 i_3 行, 第 i_4 行と第 j_1 行, 第 j_2 行が含まれ他の 4 行は欠けている. すなわち, 系 4 の定義における $A_{i_3 i_4 j_3 j_4}$ に等しい. 他の行列式についても, 同様に, 系 4 の定義に書き換えると次式になる.

$$\begin{aligned} & A_{i_3 i_4 j_3 j_4} A_{i_1 i_2 j_1 j_2} - A_{i_3 i_4 j_2 j_4} A_{i_1 i_2 j_1 j_3} + A_{i_3 i_4 j_2 j_3} A_{i_1 i_2 j_1 j_4} + A_{i_3 i_4 j_1 j_4} A_{i_1 i_2 j_2 j_3} \\ & - A_{i_3 i_4 j_1 j_3} A_{i_1 i_2 j_2 j_4} + A_{i_3 i_4 j_1 j_2} A_{i_1 i_2 j_3 j_4} = A_{j_1 j_2 j_3 j_4} A_{i_1 i_2 i_3 i_4} \end{aligned}$$

これは式 (8) に等しい.

5 定理 5

$h+n$ 行 h 列の行列 A において, $h \geq n$ であり, 第 i_1, i_2, \dots, i_n 行と第 j_1, j_2, \dots, j_n 行を相異なる $2n$ 個の昇順行番号とする. 第 i_1 行, \dots , 第 i_n 行を除いてできる h 次行列式を $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ のように表す. $\{1, 2, \dots, n\}$ から m 個を選ぶ組み合わせの数を $\mu = \binom{n}{m}$ とし, その組み合わせに 1 から μ まで番号を付す. 行番号 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ から m 個の行番号を選び, この行番号の添字の集合が k 番目の組であるときに, この行番号の集合を N_k で表す. 残った $n-m$ 個の列番号の集合を M_k とする. M_k は N_k の補集合である. 同様に, 第 j_1 行から第 j_n 行までの中から添字が l 番目の組み合わせとなる m 行を選ぶとき, この行番号の集合を Ψ_l と表す. 残った行の集合を Ω_l とする. Ω_l は Ψ_l の補集合である. 行列 A から N_k と Ω_l の n 行を除いて得られる行列式を

$$A_{N_k \Omega_l} \quad (9)$$

と表す. 同様に, 行列 A から M_k と Ψ_l の n 行を除いて得られる行列式は

$$A_{M_k \Psi_l} \quad (10)$$

となり, 他の場合も同様である. このとき,

$$\theta_1 A_{N_p \Omega_1} A_{M_p \Psi_1} + \theta_2 A_{N_p \Omega_2} A_{M_p \Psi_2} \cdots \theta_\mu A_{N_p \Omega_\mu} A_{M_p \Psi_\mu} = A_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (11)$$

が成り立つ. ただし, p は 1 から μ の間の 1 つの整数, $\theta_i = (-1)^{\nu_i}$ で, 整数 ν_i は次のように N_p と Ψ_i から決まる. すなわち, $A_{N_p \Omega_i} A_{M_p \Psi_i}$ において, N_p と Ψ_i の間で行番号の交換 (要素交換変換 [2]) を繰り返し m 回の変換でそれぞれが j_k のみおよび i_k のみになったとき, ν_i は各交換において交換する 2 つの行の間に存在する不對要素の数の合計である.

系 5

$h+n$ 行 h 列の行列 A において, 相異なる $2n$ 個の昇順行番号である第 i_1, i_2, \dots, i_n 行と第 j_1, j_2, \dots, j_n 行において, i_1, i_2, \dots, i_n の中の m 個の行番号の集合 N_k と j_1, j_2, \dots, j_n の中の $n-m$ 個の行番号の集合 Ω_l を含み, 他の行番号を全て除いて得られる行列式を $A_{N_p \Omega_i}$ とし, 他の行列式も同様に定義するとき,

$$\theta_1 A_{N_p \Omega_1} A_{M_p \Psi_1} + \theta_2 A_{N_p \Omega_2} A_{M_p \Psi_2} \cdots \theta_\mu A_{N_p \Omega_\mu} A_{M_p \Psi_\mu} = A_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (12)$$

が成り立つ. p, ν_i, θ_i 等の定義は同じままである.

証明

式 (11) の左辺第 1 項で $A_{N_p \Omega_1}$ には N_p と Ω_1 の n 行は含まれていない。一方, M_k と Ψ_1 の n 行は含まれている。すなわち, 系 5 の定義では $A_{M_p \Psi_1}$ に相当する。式 (11) の左辺第 1 項のもう一つの $A_{M_p \Psi_1}$ は同様の理由により $A_{N_p \Omega_1}$ に相当する。さらに, 変数や式の形は変わらないので ν_1 は変わらない。したがって, 式 (11) の左辺第 1 項は系 5 の定義においても変わらない。同様にして, 式 (11) 他の項も系 5 の定義でも自分自身に等しい。こうして得られる式は式 (12) に等しい。

参考文献

- [1] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 1」(2021/1/31 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory.pdf
- [2] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 2」(2021/2/26 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-2.pdf
- [3] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 3」(2021/3/1 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-3.pdf
- [4] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 4」(2021/6/10 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-4.pdf
- [5] 「1 つの行列から派生する行列式の積に関する定理 その 5 (完)」(2021/7/21 のエントリー).
http://totoha.web.fc2.com/det_prod_theory-5.pdf