

## 第2種楕円積分のランデン変換

2018.3.29 鈴木 実

### 1 はじめに

第1種不完全楕円積分のランデン変換について述べたので [1], 第2種不完全楕円積分のランデン変換についても述べておこう.

第2種不完全楕円積分  $E(\phi, k)$  は

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (1)$$

と表される.  $\phi$  は振幅,  $k$  は母数, ついでに  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  は  $k$  の補母数である.

第2種楕円積分は,  $\leq k \leq 1$  の全範囲で有限で,  $k \rightarrow 0$  で  $\phi$ ,  $k \rightarrow 1$  で  $\sin \phi$  となることがわかっているから, 昇変換ランデン変換でも下降変換ランデン変換でも数値計算に有効に使用できることがわかる.

### 2 上昇ランデン変換

第1種不完全楕円積分のランデン変換の場合と同じように,  $\theta$  から  $\psi$  への変数変換は次式により行う.

$$\sin(2\psi - \theta) = k \sin \theta. \quad (2)$$

以下の数式導出で前回のエントリー [1] と重複する所は省略することにする. まず, 式 (2) を変形することにより,

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\psi}{k + \cos 2\psi} \quad (3)$$

となる. これから,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{k + \cos 2\psi}{\sqrt{(k + \cos 2\psi)^2 + \sin^2 2\psi}} = \frac{k + \cos 2\psi}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}} \quad (4)$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\psi}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}} \quad (5)$$

となる. ここで,

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \quad (6)$$

とおいた. これから,

$$k_1' = \frac{1 - k}{1 + k}, \quad k = \frac{1 - k_1'}{1 + k_1'}, \quad k' = \frac{2\sqrt{k_1'}}{1 + k_1'} \quad (7)$$

という関係が得られる.

式 (5) を微分することにより,

$$d\theta = \frac{2(1 + k \cos 2\psi)}{(k + \cos 2\psi)^2} \cos^2 \theta d\psi, = \frac{2(1 + k \cos 2\psi)}{1 + 2k \cos 2\psi + k^2} d\psi, \quad (8)$$

となる.

また, 式 (6), (7) を用いると,

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} &= \sqrt{1 - \sin^2(2\psi - \theta)} = \cos(2\psi - \theta) = \cos 2\psi \cos \theta + \sin 2\psi \sin \theta \\ &= \frac{\cos 2\psi(k + \cos 2\psi) + \sin^2 \psi}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}} = \frac{1 + k \cos 2\psi}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}}\end{aligned}\quad (9)$$

であるから, 式 (4) と (9) から,

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + k \cos \theta = \frac{1 + k \cos 2\psi + k(k + \cos 2\psi)}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}} = \sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}\quad (10)$$

のように式が整理される. したがって, 式 (8) を合わせて,

$$\begin{aligned}&\int_0^\phi (\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} + k \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\phi_1} \frac{2 + 2k \cos 2\psi}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\psi + k^2}} d\psi \\ &= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{2 + 2k(1 - 2\sin^2 \psi)}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= \frac{1}{1+k} \int_0^{\phi_1} \frac{(1+k)^2 - 4k \sin^2 \psi + 1 - k^2}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= (1+k) \int_0^{\phi_1} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi} d\psi + (1-k) \int_0^{\phi_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi}} d\psi\end{aligned}\quad (11)$$

となる. ここで, 式 (6) の  $k_1$  を用いた. この式から,

$$E(\phi, k) + k \sin \phi = (1+k)E(\phi_1, k_1) + (1-k)F(\phi_1, k_1)\quad (12)$$

となり, 上昇ランデン変換の公式が得られる.  $\phi_1$  は式 (2) から,

$$\sin(2\phi_1 - \phi) = k \sin \phi.\quad (13)$$

の関係より求められる. 式 (7) から得られる

$$1+k = \frac{2}{1+k'_1}, \quad 1-k = \frac{2k'_1}{1+k'_1}\quad (14)$$

を代入すると, 式 (11) は,

$$E(\phi, k) = \frac{2}{1+k'_1} E(\phi_1, k_1) + \frac{2k'_1}{1+k'_1} F(\phi_1, k_1) - \frac{1-k'_1}{1+k'_1} \sin \phi\quad (15)$$

となり, 右辺は  $k$  よりも大きい  $k_1$  で表される上昇変換式が得られる.

### 3 下降ランデン変換

第 1 種不完全楕円積分の下降ランデン変換の場合と同様に, 下降変換は前節の上昇変換から変換の向きを逆にすればよい. すなわち,  $k$  と  $k_1$ ,  $\phi$  と  $\phi_1$  交換すればよい.  $\theta$  から  $\psi$  への変数変換は

$$\sin(2\theta - \psi) = k \sin \psi.\quad (16)$$

とすればよい.

そうすると、式 (12) から

$$E(\phi_1, k_1) + k_1 \sin \phi = (1 + k_1)E(\phi, k) + (1 - k_1)F(\phi, k), \quad (17)$$

式 (15) から

$$E(\phi_1, k_1) = \frac{2}{1 + k'}E(\phi, k) + \frac{2k'}{1 + k'}F(\phi, k) - \frac{1 - k'}{1 + k'}\sin \phi_1 \quad (18)$$

となり、第 2 種楕円積分の下降ランデン変換の公式が得られる。この式は岩波の数学公式 I[2]p.145 の式とウィキペディアの式 [3] に該当する。母数および振幅の変換は下記の式より得られる。

また、変換後の母数  $k_1$  と振幅  $\phi_1$  は次の式で与えられる。

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1}, \quad k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1}, \quad k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'} \quad (19)$$

$$\sin(2\phi - \phi_1) = k \sin \phi_1. \quad (20)$$

## 参考文献

- [1] 「第 1 種楕円積分のランデン変換」(2018/3/27 のエントリー).  
<http://totoha.web.fc2.com/Landen.pdf>
- [2] 森口繁一, 宇田川久, 一松信, 「数学公式 I」(岩波書店), 1971 年, p.144.
- [3] <https://ja.wikipedia.org/wiki/ランデン変換>