

ジョセフソン接合の量子化エネルギー準位 その1 (pdf)

2020.6.19 鈴木 実

1 はじめに

以前「超伝導とジョセフソン効果の基礎」[1]という短い解説を書いたとき、ページ数が限られていたので、最後のジョセフソン接合の量子化エネルギー準位の部分の説明が大分削られてしまった。その削ってしまった部分や、さらに具体的な数値計算法などをここで補っておく。

2 トンネル型ジョセフソン接合の RCSJ モデル

トンネル型ジョセフソン接合は、電子が量子力学的なトンネル効果で通過することができるくらい薄い絶縁層の両側を超伝導金属で挟んだ構造をしている。基本は極めて薄い絶縁層を金属で挟んだ構造である。こういう構造を一般にトンネル接合という。この絶縁層は障壁層という。障壁層の厚さは1 nm程度で、障壁層の高さは数 eV程度である。そうすると、電子がトンネルする確率は 10^{-4} から 10^{-3} 程度と考えてよい。それでもこれだけ電子がトンネル効果で通過すると、 $10\mu\text{m}$ 角の小さい面積でも数 Ω くらいに抵抗が小さくなる。1 mVでも電流密度が 10^3 A/cm^2 となるので、1 Vの電圧でも簡単に障壁層が破壊されてショートしてしまう。

トンネル電流は、定常状態で、かつ接合に加えられた電圧が小さい場合はほぼ電圧に比例するので電圧とトンネル電流の間には線形のオームの法則が成り立つ。一方、電圧が瞬間的に加わった場合、障壁層の両側にはトンネルし得なかった電子が接合に加えられた電圧によって一方は集められ一方は斥けられるので、コンデンサの役目をして電荷が蓄積される。したがって、トンネル接合は電気的には抵抗とコンデンサの並列回路が自然な等価回路になることがわかる。

超伝導状態になると、接合を抵抗なしに超伝導トンネル電流が流れる。これがジョセフソン電流である。最大ジョセフソン電流密度は 10^2 A/cm^2 から大きくても 10^4 A/cm^2 程度である。ジョセフソン電流には上限があって、それ以上電流が流れると電圧状態になり、超伝導電子対ではない通常の電流が流れる。これを超伝導状態では準粒子電流という。接合を構成する金属が超伝導体の場合には準粒子電流と超伝導電流が流れる。前者は抵抗とコンデンサを流れる電流 I_R と電流 I_C である。後者はジョセフソン電流 I_J で

$$I_J = I_c \sin \theta \quad (1)$$

という関係式で表される。 I_c は最大ジョセフソン電流、 θ は接合の両側の超伝導体のそれぞれの接合端における位相の差である(位相については文献[1]に簡潔に説明した。しかし、簡単ではないかもしれない。簡単に説明するのは難しい。)接合が大きい場合、 θ は接合面でも場所によって異なる場合があるがここでは同じであるとする。接合を流れる電流が I_c を超えると接合の両端には電圧 V が発生する。そのとき、 V と位相の間には

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (2)$$

という関係式が成り立つ。式(1)と式(2)はB. D. ジョセフソンによって理論的に予言されて[2]ジョセフソンの関係式と言われる。これからわかるように、電圧が有限の場合には接合には交流のジョセフソン電流が流れる。交流ではあるが、正弦波ではない。また、一般に対称でも反対称でもないので直流電流成分は0ではない。

したがって、接合を流れる電流 I は、

$$\begin{aligned} I &= I_J + I_C + I_R \\ &= I_c \sin \theta + C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V \end{aligned} \quad (3)$$

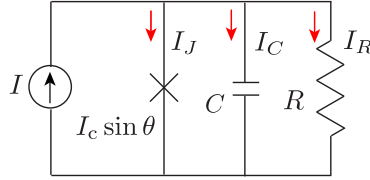


図 1: トンネル型ジョセフソン接合の RCSJ モデル等価回路

となる．これを等価回路で図示すると図 1 になる．これがトンネル型ジョセフソン接合の等価回路である．RCSJ モデル (Resistively and Capacitively Shunted Model) と呼ばれる．

3 トンネル型ジョセフソン接合の動力学 (運動方程式)

式 (3) に式 (2) を代入すると，

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\theta}{dt} + I_c \sin\theta - I = 0 \quad (4)$$

となる．この式は θ に関する 2 次の微分方程式で変数は時間である． θ を仮想的な粒子の座標と見れば，粒子の運動方程式になっていることがわかる．実際， $d^2\theta/dt^2$ の係数は慣性モーメントを磁束 Φ で割った次元， $d\theta/dt$ の係数はトルク摩擦係数を磁束 Φ で割った次元，第 3 項は，トルクを磁束 Φ で割った次元であることがわかる．¹したがって，式 (4) に $\hbar/2e = \Phi_0/2\pi$ を掛けると回転運動する粒子の回転角 θ に関する運動方程式になり，

$$\left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\hbar I_c}{2e} \left(\sin\theta - \frac{I}{I_c}\right) = 0 \quad (5)$$

とすることができる．これをさらに次のように書き換えてみよう．

$$M_I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial\theta} U - \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

¹次元解析をするため，SI の次元として長さ L ，質量 M ，時間 T および電荷 Q ，電圧 V ，を用いることにしよう．エネルギー E は $E = ML^2T^{-2}$ である．それ以外の物理量の次元は $[\]$ のように括弧で囲んで表す．例えば，容量 C の次元は $[C]$ と表す．

まず， $\hbar/2e = \Phi_0/2\pi$ で， Φ_0 は磁束量子である．次に，マクスウェルの方程式から， $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ であるから， $V/L^2 = [\Phi]/L^2T$ となり，したがって， $[\Phi] = VT$ となる．また， $CV = Q$ より， $[C] = Q/V$ であり，および $E = QV$ も成り立つ．

以上を用いると，

$$\left[\frac{\hbar C}{2e}\right] = [\Phi][C] = VT[C] = VT\frac{Q}{V} = QT = \frac{ET}{V} = \frac{ML^2 T}{T^2 V} = \frac{ML^2}{TV} = \frac{ML^2}{[\Phi]}$$

となる．この式は式 (4) の第 1 項の係数は，慣性モーメント ML^2 を磁束で割った次元になっていることを示している．

次に，第 3 項の電流 I に関しては，

$$[I] = \frac{Q}{T} = \frac{QV}{VT} = \frac{E}{VT} = \frac{E}{[\Phi]}$$

となり，力を F として，トルク $FL = E$ を磁束で割った次元になっていることがわかる．

第 2 項の係数についても同様に，

$$\left[\frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R}\right] = [\Phi]\left[\frac{I}{V}\right] = [\Phi]\left[\frac{Q}{VT}\right] = Q = \frac{E}{V} = \frac{ET}{VT} = \frac{ET}{[\Phi]}$$

となり，これは摩擦係数を磁束で割った次元で，回転運動の角速度を掛けるとエネルギーを磁束で割った次元になる．

つまり，方程式 (4) は回転の運動方程式を磁束で割った式になっていることがわかる．磁束で割るところは各項共通なので無視して考えると，要するに，回転運動の位相に関する運動方程式になっていることがわかる．実際，この方程式は次の振り子の運動方程式と同じ形をしている．

$$\tau = M_I \frac{d^2\theta}{dt^2} + D_f \frac{d\theta}{dt} + mgl \sin\theta$$

ただし， τ は回転のトルク， M_I は粒子の慣性モーメント， D_f は摩擦係数， m は粒子の質量， g は重力加速度， l は振り子の長さである．これから， I は回転のトルク， C は慣性モーメント，第 2 項は摩擦係数に対応していることがわかる．

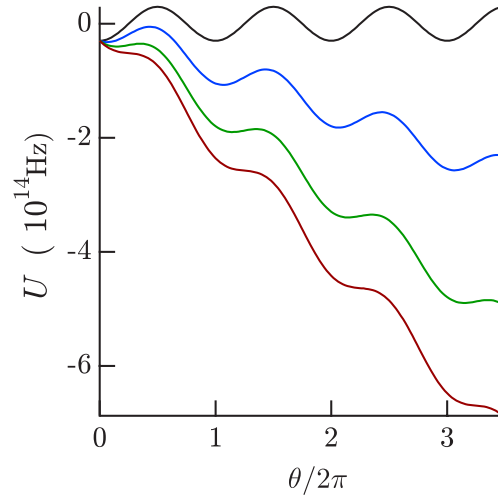


図 2: ジョセフソン接合の運動モデルにおけるポテンシャル . $I_c = 60 \mu\text{A}$, $\alpha = 0, 0.4, 0.8, 1.1$ の場合 .

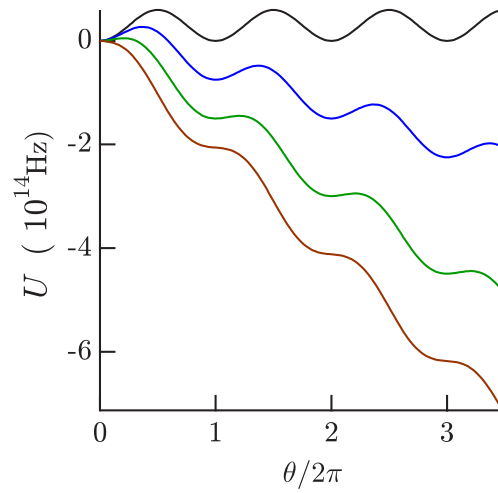


図 3: 図 2 のジョセフソン接合の運動モデルにおけるポテンシャルで , 極小値を原点に移動した場合 . $I_c = 60 \mu\text{A}$, $\alpha = 0, 0.4, 0.8, 1.1$ の場合 .

ただし ,

$$M_I = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C \quad (7)$$

$$U = -\frac{\hbar I_c}{2e} (\cos \theta + \alpha \theta) \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{I}{I_c} \quad (9)$$

である . そうすると , 式 (6) は慣性モーメント $(\hbar/2e)^2 C$ の粒子が式 (7) のポテンシャル U の下で運動する方程式を表していることがわかる . このポテンシャルの形を図 2 に示す .

このポテンシャルは電流が 0 のときは $\cos \theta$ の形をしており , 粒子はポテンシャルの底を中心に振動運動する . 電流が流れ出すとポテンシャルは $\alpha = I/I_c > 0$ の傾きをもちはじめ , $\alpha > 1$ になるとポテンシャルの極小値がなくなり , 粒子は連続的な落下運動を始める . このような運動をする状態は式 (2) から有限の直流成分を持つことに対応し , ジョセフソン接合が電圧状態にスイッチしたことを表している . 図 2 と図 3 に式 (7) の U

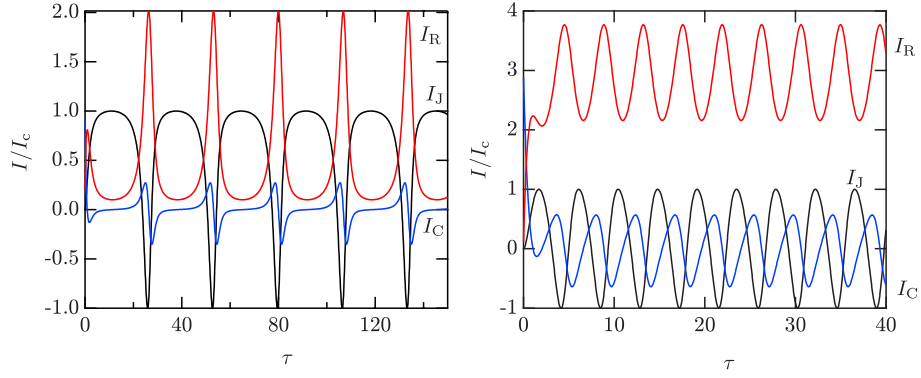


図 4: RSCJ モデルで式 (13) から得られるジョセフソン電流 I_J , コンデンサ電流 I_C , および抵抗電流 I_R の計算結果 . $Q = 0.5$ で $a = 1.1$ (左) および $a = 3$ の場合 .

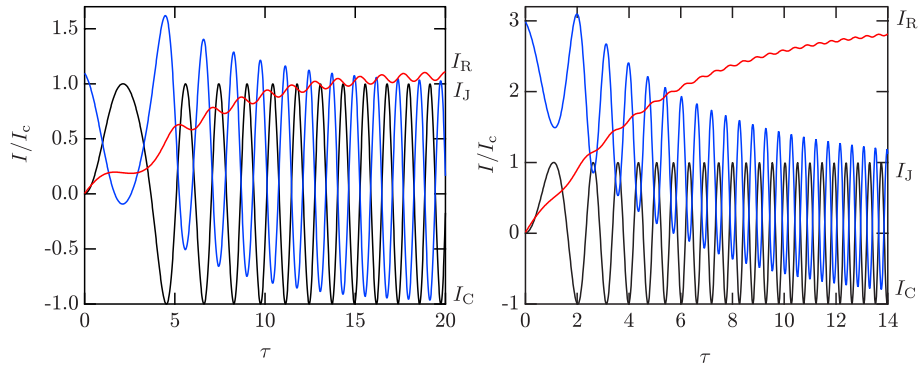


図 5: RSCJ モデルで式 (13) から得られるジョセフソン電流 I_J , コンデンサ電流 I_C , および抵抗電流 I_R の計算結果 . $Q = 5$ で $a = 1.1$ (左) および $a = 3$ の場合 .

を α と I_c をパラメータとして図示した . $\alpha > 1$ で粒子が振動運動から連続運動に切り替わることが直感的に理解できる .

式 (4) を数値的に解くために変数 t を $\tau = \omega_p t$ と変換して数式を簡単にしよう . 式 (4) に代入すると ,

$$\frac{\hbar C}{2eI_c} \omega_p^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{\hbar\omega_p}{2eI_c} \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\tau} + \left(\sin\theta - \frac{I}{I_c} \right) = 0 \quad (10)$$

となる . ここで ,

$$\omega_p^2 = \frac{2eI_c}{\hbar C} \quad (11)$$

とおくと ,

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{RC\omega_p} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta - \frac{I}{I_c} = 0 \quad (12)$$

という簡単な形になる . さらに , $Q = RC\omega_p$, $\alpha = I/I_c$ とおけば ,

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta - \alpha = 0 \quad (13)$$

とすることができる .

3.1 $\alpha > 1$ の場合

式 (13) の微分方程式は連立ルンゲ-クッタ法を用いて計算することができる。計算の詳細は付録 B に示す。図 4 と図 5 に、ジョセフソン電流 I_J 、コンデンサを流れる電流 I_C 、および抵抗を流れる電流 I_R の時間的変化の計算結果を示す。コンデンサ容量 C は接合寸法が同じならあまり大きく変わらないのでここでは C は一定であることにしよう。そうすると、 $Q = \omega_p RC$ の大きさは R によって決まる。すなわち、 Q が大きい場合は単純に R が大きいと考えて良い。

3.1.1 RCSJ モデルによる解釈

最初に、 Q が小さい場合で過減衰 (overdamp) と言われる状態の場合を考えてみよう。図 4 は $Q = 0.5$ の場合で、過減衰 (overdamp) と言われる状態である。最初に $\alpha = 1.1$ の場合を考えよう。これは外部から流される直流電流がジョセフソン接合の最大電流よりもわずかに大きいという場合である。初期条件は $\theta = 0$ 、 $d\theta/d\tau = 0$ である。つまり $(1/Q)d\theta/d\tau = (1/RI_C)V$ であるから、最初はジョセフソン接合と R に電流は流れない。したがって、 $\tau = 0$ で $\alpha = 1.1$ の電流がステップ状に流れると、最初に C に $\alpha = 1.1$ が流れる。 C に電荷が蓄積されると電圧が発生し式 (2) により θ が増加する。その後、ジョセフソン電流は $\alpha = 1$ までは増えるが、それ以上は増えない。超過分の $\alpha - \sin\theta \geq 0.1$ は R に流れるので常に $V > 0$ となり、 θ は増え続ける。このような動きを周期的に続けることになる。以上の振る舞いを図 4(左) に示す。

上の条件の場合で、最大ジョセフソン電流の 1 を超える分はコンデンサと抵抗に分流されることになるが、抵抗に流れる分は抵抗が小さいために発生する平均電圧は小さくなり、式 (2) の関係式からジョセフソン電流の周波数は低い。一方、常に $V > 0$ であるため、 θ は増加し続けるので、ジョセフソン電流が逆方向に流れる位相領域に入ると、それを相殺するために I_R が急激に増加し、これにより増加した V のため位相が急激に増加する。このような位相の変化は図 6(左) に示した。このような位相の変化のために電流の非線形性は図 4(左) に見られるように著しくなる。

一方、 $\alpha = 3$ のように、 α が 1 よりも十分大きくなると、 R に流れる電流が大きくなり、したがって図 4(右) のように、平均の電圧も高くなりジョセフソン電流の周波数が高くなる。さらに I_R に占める $\sin\theta$ の変化の割合が小さくなるため、 θ の増加はより単調になり非線形性が小さくなって周期的変化の割合が小さくなる。その振る舞いを図 6(右) に示す。これにより、図 4(右) のように電流の波形は正弦波に近くなる。

$\alpha = 1.1$ と $\alpha = 3$ の両方の場合とも、 Q が小さい場合は速く減衰するためにすぐに一定の周期の振動になる。図 4 を見れば、1 周期以内に定常状態に達していることがわかる。

次に、図 5 の $Q = 5$ の場合を考えてみよう。このように Q が大きい場合は不足減衰 (underdamp) 状態と言われる。 C は一定であると考えて良いので、この場合も R が図 4 の場合よりも 10 倍大きいと考えてよい。したがって、同じ電流であっても接合両端に発生する電圧は図 4 の $Q = 0.5$ の場合よりも 10 倍大きいために周期は約 $1/10$ になっていることがわかる。また I_R に占める $\sin\theta$ の振動成分は全体に比較して小さくなり、直流成分の割合が大きくなっている。したがって、電圧が大きくなり周波数が高く、周期が小さくなる。さらに、 α が大きくなれば図 5(右) のように周期はさらに小さくなる (τ のスケールが違うことに注意)。

図 4 に比較すると、最初の部分で周期が長いのは、不足減衰であるために緩和時間が長く図 4 よりも定常状態に入るまでの時間がかかっているためである。

3.1.2 傾斜した洗濯板ポテンシャルモデルによる解釈

Q すなわち減衰の大小と位相 θ の関係は図 2 または図 3 の傾斜した洗濯板モデルを考えると直感的にわかりやすい。この減衰の大小を式 (13) の傾斜した洗濯板モデルで表現すれば摩擦係数の大小に相当し、 Q が大きい

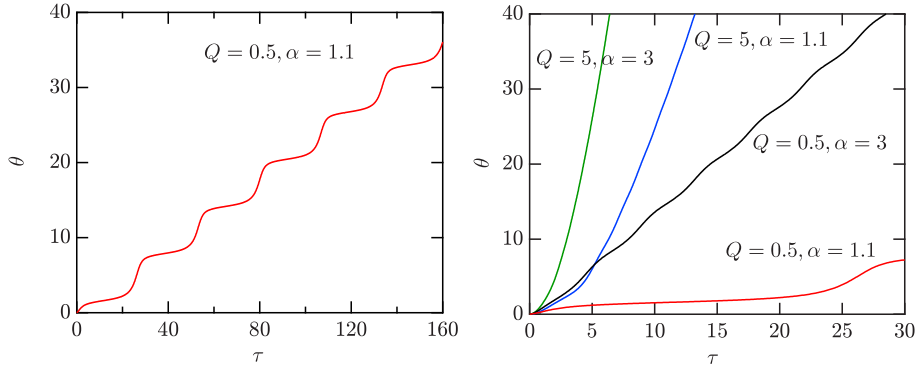


図 6: RSCJ モデルで式 (12) から得られるジョセフソン電流 I_J , コンデンサ電流 I_C , および抵抗電流 I_R の計算結果. $Q = 5$ で $\alpha = 1.1$ (左) および $\alpha = 3$ の場合.

場合は摩擦が少なく, Q が小さい場合は摩擦が大きい. したがって, Q が小さい場合はすぐに定常運動状態に減衰するのに対し, Q が大きい場合は摩擦が少ないので加速してからゆっくりと減衰して定常運動状態に入ることになる.

電流 I が最大ジョセフソン電流 I_c を超えた時, つまり $\alpha > 1$ のとき, 傾斜した洗濯板ポテンシャルには極小点なくなり, 仮想的な粒子は傾いた洗濯板を連続的に落下運動をする. そのとき, 過減衰であれば摩擦係数が大きいので, 粒子は加速されずに速度は加えられた力に比例し, 傾斜した洗濯板ポテンシャルに極小値があればそこで停止する. したがって, I が I_c を少し超えた程度では粒子の速度は停止しそうなときがあり, その後また速度が大きくなるという運動を周期的に繰り返す. つまり, 位相の時間推移に周期的部分の割合が大きく, その結果, 図 4(左) のような, 正弦波から大きく外れた波形の電流が流れる.

I が大きくなると, 図 4(右) のように, 交流電流の波形は正弦波に近づいて行くことがわかるが, このことは洗濯板ポテンシャルの傾斜が急になった場合に相当するから, 上と同様な考察で, 粒子がより定速運動に近づくということで説明できる.

3.1.3 位相の時間推移

図 4 と図 5 の場合の θ の時間依存性 $\theta(\tau)$ を式 (13) を用いて計算した結果を図 6 に示す. α が大きいほど洗濯板の傾斜が急になるのに対応して, $\theta(\tau)$ の傾きが急になる. つまり仮想粒子の速度が速くなり電圧が大きくなる. Q が大きいほど, 仮想粒子と洗濯板の間の摩擦が小さくなり, また, 仮想粒子は $\tau = 0$ から加速されて $\theta(\tau)$ の傾きは急になり, あるところで定常状態になる. 図 6(右) を見れば, 原点付近では $Q = 0.5$ と $Q = 5$ は同じ傾きで出発しても $Q = 5$ のほうはしばらく加速してから定常状態に達して速度に大きな差がでることがわかる.

$\theta(\tau)$ が直線的になるとジョセフソン電流は正弦波に近くなる. したがって, Q と α が大きくなるほど電流波形が正弦波的になることがわかる. 摩擦が大きく, 傾きがゆるく仮想粒子がかろうじて洗濯板ポテンシャルの山を越せる程度の α の場合には, 仮想粒子の速度は洗濯板ポテンシャルの形に大きく依存することも直感的にわかる. このとき, θ は $\sin \theta$ に強く依存してジョセフソン電流は非正弦波的な波形になる. 数式的な理解は脚注²に示す.

²式 (12) は I_c を単位とする (I_c で規格化した) 電流のキルヒホッフの法則を表す. 第 1 項は I_C , 第 2 項は I_R , 第 3 項は I_J , 第 4 項は外部から供給される直流電流 I に相当する. $\alpha > 1$ であるから 1 を超えた分は必ず抵抗 R に流れて電圧 V が発生する. そのとき, 式 (2) から I_J に角周波数を ω の交流電流が流れる. したがって, C と R にも交流電流が流れる. つまり, V と I_R は交流成分を持つ.

3.2 $\alpha < 1$ の場合

$\alpha < 1$ の場合は電流が最大ジョセフソン電流 I_c を超えないので抵抗 R に流れる電流の時間平均は 0 になり、直流電流は流れない。つまりジョセフソン接合には交流の電流と電圧が発生するのみである。 $\alpha = 0.4$ として、 Q を 10, 50, 1000 と変えた場合のジョセフソン電流 I_J 、コンデンサ電流 I_C 、および抵抗電流 I_R を図 7 に、位相の時間推移を示す。この場合は Q が波形振幅の減衰に明瞭に反映されているのでその意味するところが明らかである。すなわち、 Q が小さいときには過減衰となり振幅は急激に減衰して、 θ は一定値 $\sin^{-1} \alpha$ に収束する。交流電流成分は 0 になる。一方、 Q が大きいときには減衰が緩やかになり、 $Q = 1000$ 程度になるとほとんど減衰しなくなる。

この運動は、図 2 のような傾斜した洗濯板ポテンシャルの底の部分で仮想粒子が自由運動して振動する場合と同じである。振動の中心点は、傾いていない洗濯板ポテンシャルの最低点からシフトした点になる。図 7 または図 8 を見ればわかるように、電流または位相の振動運動は $\sin^{-1} 0.4$ を中心として振動運動しており、これが傾斜した洗濯板ポテンシャルの極小点に対応する。

α が有限であるときポテンシャルは非対称になり解析解を求めることは困難であるが、 $\alpha = 0$ の場合は付録に示すように、仮想粒子の運動は単振子の運動と同じ運動方程式で記述されて、ヤコビの楕円関数で表される。ヤコビの楕円関数は母数 k が小さいとき正弦波に近くなり $k = 0$ のときには正弦波に一致する。実際、数値計算をすればわかるように [3] $k \lesssim 0.5$ ではほとんど正弦波に近い。付録にあるように、 $k \propto v$ で $\theta = 0$ における仮想粒子の速度が小さい時、つまり振幅が小さいときには正弦波に非常に近くなる。減衰が小さい時のこのような振動が次節に述べるエネルギー準位量子化の対象になる。

3.3 ジョセフソン接合のインダクタンス

ジョセフソン接合に流れる電流が I_c 以下の場合、つまり $\alpha < 1$ ではジョセフソン接合は超伝導電流のみ流れるので、図 7 や図 8 で並列コンデンサに電圧が発生してジョセフソン接合にも電圧が加わることが奇妙に思われるかもしれない。これはジョセフソン接合が交流電流に対してインダクタンスとして働くため、交流では $\alpha < 1$ でも電圧が発生する。これは超伝導体には、超伝導電子対の運動エネルギーに付随するカイネティッ

式 (2) の変数 t を τ にすると、

$$V = \frac{\hbar \omega_p}{2e} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{I_c}{\omega_p C} \frac{d\theta}{d\tau}$$

となるので、

$$I_R = \frac{V}{RI_c} = \frac{1}{\omega_p RC} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{Q} \frac{d\theta}{d\tau}$$

と表すことができる。 I_R は交流成分をもつので、その角周波数を ω とすると、 θ は $\omega\tau$ の他に交流成分の項を含まなければならない。その交流成分を Q と α が大きい場合を考え、 $\sin \omega\tau$ としよう。ここでは簡単のため位相の定数項を無視することにしよう。そうすると、

$$\theta = \omega\tau + \beta \sin \omega\tau$$

と書くことができる。以上の式を式 (12) に代入すると、

$$-\beta \omega^2 \sin \omega\tau + \frac{1}{Q} (\omega + \beta \omega \cos \omega\tau) + \sin \theta - \alpha = 0$$

である。正弦波の項は同じ周期で 1 周期の積分で 0 になるからこの式を 1 周期で積分すると $\omega/Q = \alpha$ となるから

$$\omega = Q\alpha$$

となり、 Q と α が十分大きい場合は振動波形は正弦波に近くなり、その周期は上の式で与えられる。実際、図 4、図 5 の各周波数はこの式の値に近い。

上の関係のもとで、

$$-\beta \omega^2 \sin \omega\tau + \frac{\beta \omega}{Q} \cos \omega\tau + \sin \theta = 0$$

が成り立つためには、第 2 項は第 1 項に比較して $1/Q^2 \alpha$ 程度に小さいから、第 1 項の係数 $\beta \omega^2$ は $\sin \theta$ と打ち消す程度に十分 1 に近くなければならないことがわかる。 Q と α が十分大きく、 $\omega^2 \gg 1$ であるから、 $\beta \ll 1$ でなければならない。これから θ の第 2 項は第 1 項に比べて十分に小さく、 $\beta \omega^2 \sin \omega\tau \simeq \sin \theta$ とできるので $\sin \theta$ は正弦波に非常に近いと考えてよいということがわかる。

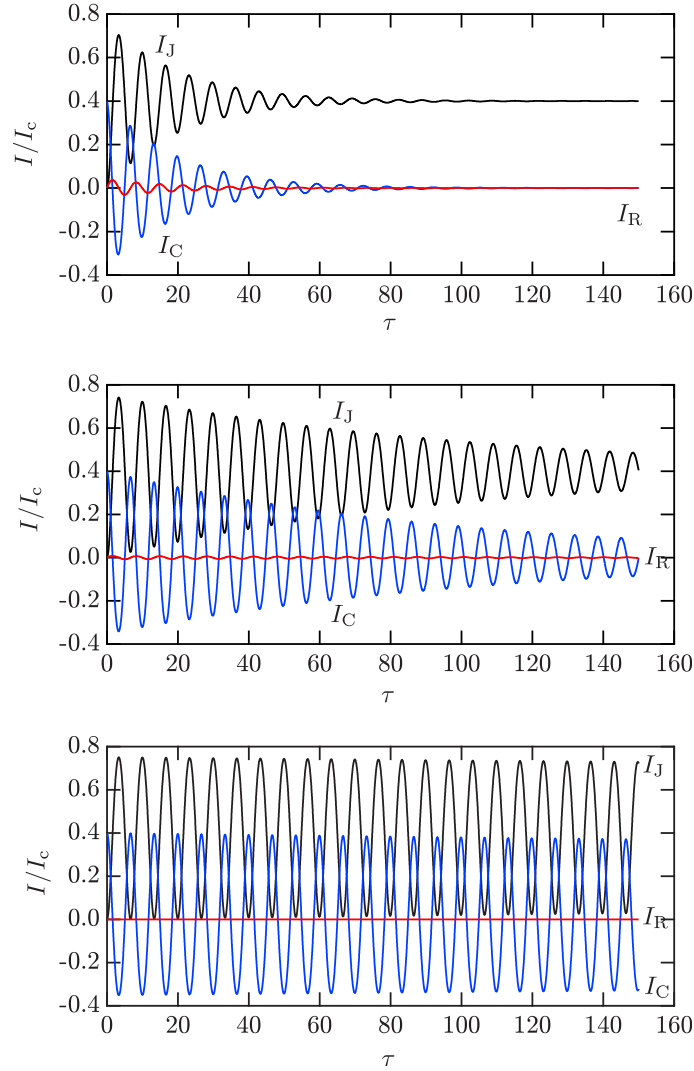


図 7: RSCJ モデルで damping が小さい (Q が大きい) 場合のジョセフソン電流 I_J , コンデンサ電流 I_C , および抵抗電流 I_R の計算結果. $a = 0.4$ で, 上から $Q = 10, 50, 1000$.

ク・インダクタンスがあり, 磁束の鎖交に付随する電磁的なインダクタンスと同様に, 臨界電流以下でも交流では電圧が発生することと同じである.

実際, ジョセフソンの関係式 (1) から

$$\frac{dI_J}{dt} = I_c \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (14)$$

となる. これにジョセフソンの 2 番目の関係式 (2) を代入すると,

$$\frac{dI_J}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V I_c \cos \theta \quad (15)$$

となるから, これより

$$V = \frac{\hbar}{2e I_c \cos \theta} \frac{dI_J}{dt} \quad (16)$$

となり, インダクタンス L は $V = L(dI/dt)$ であるから, ジョセフソン接合は

$$L = \frac{\hbar}{2e I_c \cos \theta} \quad (17)$$

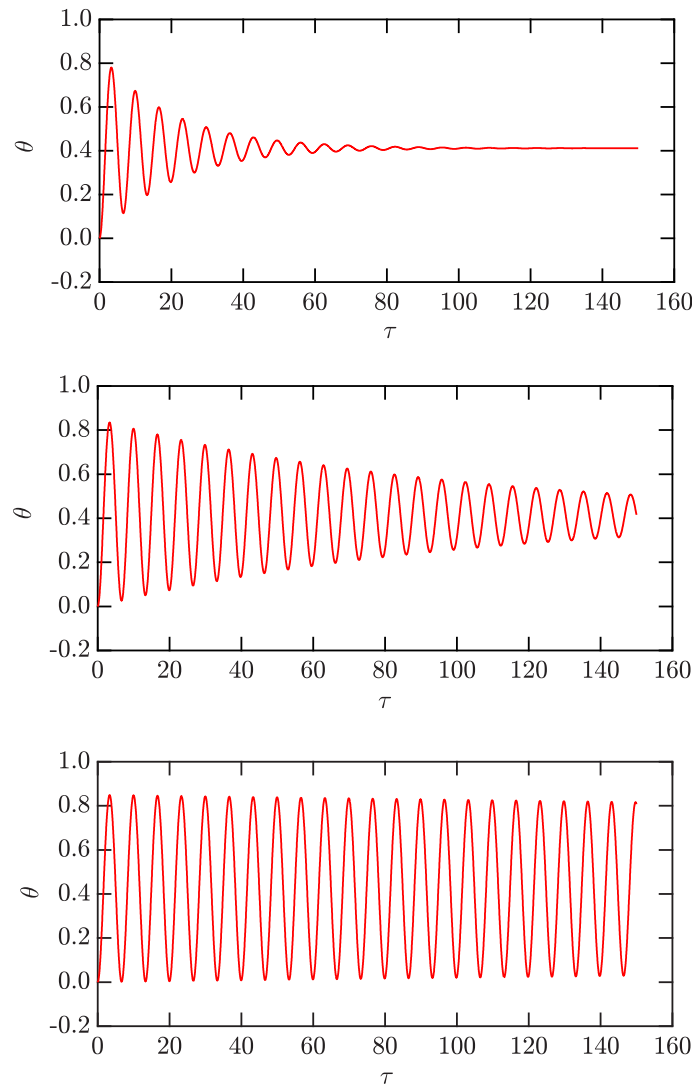


図 8: RSCJ モデルで damping が小さい (Q が大きい) 場合の位相の時間推移の計算結果. $a = 0.4$ で, 上から $Q = 10, 50, 1000$.

のインダクタンスを持つことになる. これをジョセフソン接合の等価インダクタンスという. その θ 依存性を図 9 に示す.

参考文献

- [1] 「量子限界への扉を開くジョセフソン効果 — 発見から 50 年, その基礎と応用 — 小特集 1 超伝導とジョセフソン効果の基礎」, 電子情報通信学会誌 Vol. 95 (8) 731 (2012).
<http://www.totoha.net/archiv/ieice2012.pdf>
- [2] B. D. Josephson, “Possible new effects in superconductive tunneling”, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
http://www.totoha.net/archiv/2631_Josephson.pdf

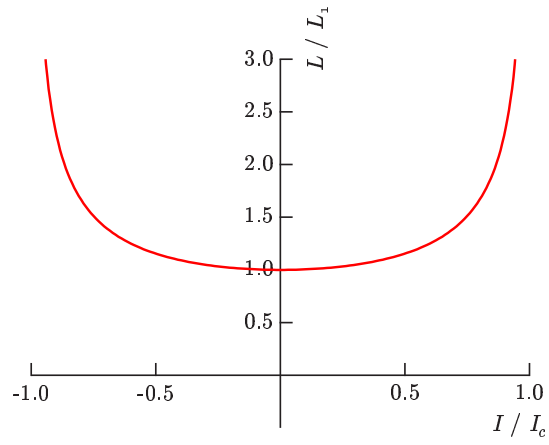


図 9: ジョセフソン接合の等価インダクタンス. $L_1 = 2e/\hbar I_c$

[3] 「ヤコビの楕円関数の数値計算プログラム」

http://totoha.web.fc2.com/Jacobi_Elliptic_functions.pdf