

# 双曲面幾何 (その 3) クライン円板 [図入り, 一部追加]

2017.3.18 鈴木 実

## 1 回転双曲面から Klein 円板へ

回転双曲面 (hyperboloid)  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  に非ユークリッド計量  $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 = -1$  を導入して構成される双曲幾何は 3次元ユークリッド空間の中の 2次元曲面の上にある。これは図示するのが困難で推論するときにごちない。これを 2次元平面に変換すると図示することも簡単になる。その変換で得られる平面上で構成される双曲幾何の一つがクライン円板 (Klein disk) である。(Beltrami-Klein model とも言われる。)

クライン円板の定義すなわち回転双曲面からクライン円板への変換は次のように行う。次の式で表される回転双曲面 (上半二葉双曲面, 以下双曲面)

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad (z > 0) \quad (1)$$

の上の点を, この点から原点  $O$  を通る直線によりこの直線が  $z = 1$  の平面上と交差する点を対応させる。これを 1つの写像とすると, この写像による点の集合は点  $(0, 0, 1)$  を中心とする半径 1 の円の内部になる。この円に円周を加えたものは円板になる。この円板をクライン円板 (Klein disk) という。図 1 に双曲面とクライン円板の関係を示す。

双曲面上の点を  $(x_1, y_1, z_1)$ , 対応するクライン円板上の点を  $(x, y)$  とする。上に述べた変換 (写像) から,

$$x = x_1/z_1 \quad (2)$$

$$y = y_1/z_1 \quad (3)$$

という関係が成り立つ。

## 2 計量

双曲面を一般に

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = -1 \quad (4)$$

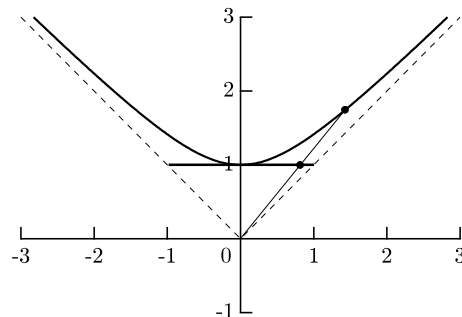


図 1: 双曲面とクライン円板の  $y = 0$  面による断面図。双曲面上の点とクライン円板上の対応する点との間の関係を示す。

とすると、その計量は

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 - dy_{n+1}^2 \quad (5)$$

である。双曲面の座標とクライン円板の座標の関係は、

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}}, \quad \cdots, \quad x_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}, \quad x_{n+1} = 1 \quad (6)$$

である。式(6)より  $y_i = x_i y_{n+1}$  であるから、 $dy_i = y_{n+1} dx_i + x_i dy_{n+1}$  となり、かつ、式(4)と式(5)から

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - \frac{1}{y_{n+1}^2} \quad (7)$$

となるからこの関係を用いると、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i=1}^n (y_{n+1} dx_i + x_i dy_{n+1})^2 - dy_{n+1}^2 \\ &= y_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 + 2y_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i dx_i dy_{n+1} + dy_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - dy_{n+1}^2 \\ &= y_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 + 2y_{n+1} dy_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i dx_i - \frac{dy_{n+1}^2}{y_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。式(7)から、

$$y_{n+1}^2 = \frac{1}{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2} \quad (9)$$

となり、これからさらに、

$$y_{n+1} dy_{n+1} = \frac{x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i dx_i}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} \quad (10)$$

が得られる。これら2つの式を式(8)に代入すると、

$$ds^2 = y_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 + 2 \frac{(\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} - \frac{1}{y_{n+1}^4} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_i dx_i}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} \right]^2 \quad (11)$$

となる。これに式(9)に代入すると、

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^n dx_i^2}{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2} + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i dx_i)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2)^2} \quad (12)$$

となる。これがクライン円板の計量である。

双曲面が3次元実空間の双曲面の場合に、式(12)から計量は

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{(xdx + ydy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (13)$$

となる。

前の entry[1] で用いた双曲面上の点  $(x_1, y_1, z_1)$  を表すパラメータ  $t$  を用いると、

$$x = \alpha \cosh t \cos \varphi - \sinh t \sin \varphi \quad (14)$$

$$y = \alpha \cosh t \sin \varphi + \sinh t \cos \varphi \quad (15)$$

$$z = \beta \cosh t \quad (16)$$

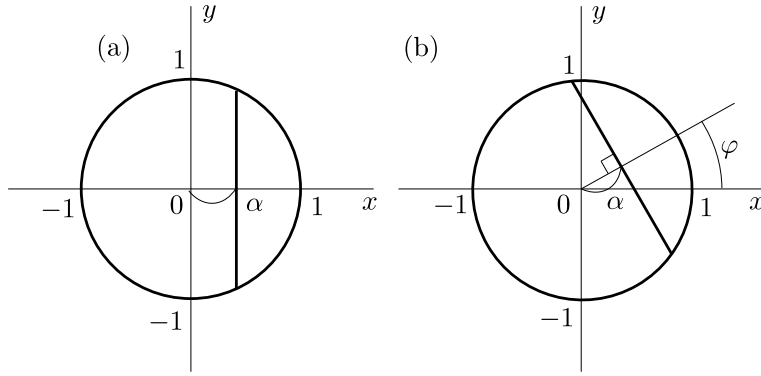


図 2: クライン円板の直線. 原点からの距離が  $\alpha$ ,  $y$  軸からの傾きが  $\varphi$ .

となる [1]. ここで,  $\alpha = \tan \theta$ ,  $\beta = 1/\sqrt{1 - \tan^2 \theta} = 1/\sqrt{1 - \alpha^2}$  である. クライン円板上の点  $(x, y)$  をこのパラメータ  $t$  を用いて表すと,

$$x = \alpha \cos \varphi - \frac{1}{\beta} \sin \varphi \tanh t \quad (17)$$

$$y = \alpha \sin \varphi + \frac{1}{\beta} \cos \varphi \tanh t \quad (18)$$

となる. すなわち, クライン円板上の点もパラメータ  $t$  を用いて表すことができる. また, 式 (14)–(16) は双曲面上の直線 (測地線) を表しているので, 式 (17), (18) はクライン円板における直線を表す. 双曲面からクライン円板へ変換する方法からでも明らかのように, クライン円板の双曲直線はユークリッド平面の直線である. 式 (17), (18) から  $t$  を消去すると,

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \alpha \quad (19)$$

となる. これが直線の方程式で, 傾きが  $-\cot \varphi$ , 原点からの距離が  $\alpha$  の直線を表している. 図 2 は式 (19) の示すクライン円板の双曲直線を示す. 左は  $\varphi = 0$  の場合である.

図 3 はクライン円板上の 1 本の直線  $g$  とその上にない点  $A$  を示す. 図で  $A$  を通る 3 本の直線はクライン円板上で直線  $g$  と交わらない. したがって, 幾何公準による平行である. このように, クライン円板では 1 つの直線とその上にない点において, この点を通る直線は連続的に無限に引くことが可能である.

このパラメータ  $t$  を用いた場合の計量を計算してみよう. 式 (17), (18) から

$$\frac{1}{1 - x^2 - y^2} = \beta^2 \cosh^2 t \quad (20)$$

$$\frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \beta^4 \cosh^4 t \quad (21)$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{\beta^2} \operatorname{sech}^4 t dt^2 \quad (22)$$

$$x dx + y dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\beta^2} \tanh^2 t \right) dt = \frac{1}{\beta^2} \tanh t \operatorname{sech}^2 t \quad (23)$$

となる. これを式 (13) に代入すると,

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2 t dt^2 + \tanh^2 t dt^2 = dt^2 \quad (24)$$

となる. したがって,

$$ds = dt \quad (25)$$

である. これは双曲面で成り立つ計量とパラメータと同じ関係である. しかし, これはそうなるように定義しているからこの関係が成り立つのは当然である. このように, パラメータ  $t$  と計量の関係が明らかになったので, クライン円板における距離が計算できる.

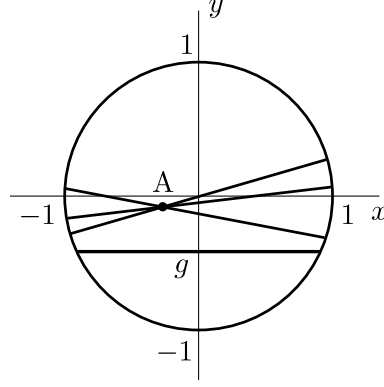


図 3: クライン円板の直線とその上にない点 A を通り交わらない直線.

### 3 クライン円板上の線分の長さ

実空間の長さ  $l$  をパラメータ  $t$  を用いて表してみよう. 直線の方向ベクトル  $\mathbf{t}$  は式 (17), (18) から,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = {}^t(-\beta^{-1} \sin \varphi \operatorname{sech}^2 t, \beta^{-1} \cos \varphi \operatorname{sech}^2 t) \quad (26)$$

となるから, 直線方向の微小長さ  $dl$  は

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt \quad (27)$$

と表される.

いま, 図 4 のようにクライン円板上に直線を考え, その直線上に点  $P(t_1)$  と点  $Q(t_2)$  を考えよう. そうすると線分  $PQ$  の実空間の長さ  $l(P, Q)$  は

$$l(P, Q) = \int_P^Q dl = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt = \frac{1}{\beta} (\tanh t_2 - \tanh t_1) \quad (28)$$

となる. 一方, クライン円板上の長さ  $d(P, Q)$  は式 (25) から明らかなように

$$d(P, Q) = t_2 - t_1 \quad (29)$$

である.  $d(P, Q)$  を実空間の長さで表してみよう. 線分  $PQ$  を両端から双方向に延長して円周と交わる点を A および B とする. それぞれは  $t = -\infty$  と  $t = \infty$  に対応する. 実空間における線分の長さを簡単のために,  $AP$  を  $a$ ,  $QB$  を  $b$ ,  $AQ$  を  $q$ ,  $PB$  を  $p$  としよう. そうすると, 式 (28) と同じ計算により,

$$a = l(P, Q) = \int_A^P dl = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt = \frac{1}{\beta} (\tanh t_1 + 1) \quad (30)$$

$$b = l(Q, B) = \int_Q^B dl = \int_{t_2}^{\infty} \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt = \frac{1}{\beta} (1 - \tanh t_2) \quad (31)$$

$$p = l(P, B) = \int_P^B dl = \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt = \frac{1}{\beta} (1 - \tanh t_1) \quad (32)$$

$$q = l(A, Q) = \int_A^Q dl = \int_{-\infty}^{t_2} \frac{1}{\beta} \operatorname{sech}^2 t dt = \frac{1}{\beta} (\tanh t_2 + 1) \quad (33)$$

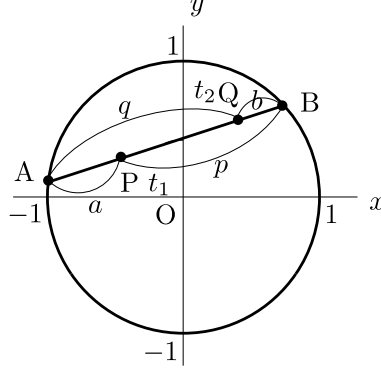


図 4: クライン円板の直線上の 2 点  $P(t_1)$ ,  $Q(t_2)$  間の距離.  $AP$ ,  $QB$ ,  $PB$ ,  $AQ$  のユークリッド距離を  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$  とする.

となる. これから  $pq/ab$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{pq}{ab} &= \frac{(1 - \tanh t_1)(1 + \tanh t_2)}{(1 + \tanh t_1)(1 - \tanh t_2)} = \frac{(1 - \tanh t_1)^2(1 + \tanh t_2)^2}{(1 - \tanh^2 t_1)(1 - \tanh^2 t_2)} \\ &= \frac{(1 - \tanh t_1)^2(1 + \tanh t_2)^2}{\operatorname{sech}^2 t_1 \operatorname{sech}^2 t_2} = (\cosh t_1 - \sinh t_1)^2 (\cosh t_2 + \sinh t_2)^2 \\ &= e^{-2t_1} e^{2t_2} = e^{2(t_2 - t_1)} \end{aligned} \quad (34)$$

となる. この式と式 (29) より,

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} \ln \frac{pq}{ab} \quad (35)$$

という関係式が得られる. これはクライン円板における線分の長さを実空間における長さの関係を与える. クライン円板の中心  $O$  からの実空間長さを  $r$  とすると,  $P$  が  $O$  と一致する場合を考えれば良い. すなわち,  $a = 1$ ,  $p = 1$ ,  $b = 1 - r$ ,  $q = 1 + r$  となり,

$$d(O, Q) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (36)$$

となる. この関係式は

$$r = \tanh d(O, Q) \quad (37)$$

と書き換えることもできる.

## 4 クライン円板上の角度

双曲面上の直線とクライン円板の直線は第 1 節で述べた両者の関係から実空間の 1 つの平面上にあることがわかる. 双曲面幾何における角度の定義は双曲面上の 1 つの点を始点とする半直線のなす角度であって, 実空間では始点におけるそれぞれの測地線に対する接ベクトルの間の角度である. この接ベクトルはそれぞれの測地線を定義する平面内にあるから, この接ベクトルに対応するクライン円板上のベクトルも対応する半直線上にある. したがって, クライン円板における角度も対応する 2 つの半直線の間の角度とすることができる.

しかし, 双曲面の接平面はクライン円板から一般に傾いているために, 双曲面における角度とクライン円板上の対応する半直線間の角度は一致しない. 接平面がクライン円板と平行な場合, つまり, 点  $(0,0,1)$  における接平面内に接線ベクトルがある場合にのみ両者の角度は一致する. それ以外は, クライン円板の角度は双曲面における角度よりも大きくなるこれは, 双曲面の角度を定義する接平面は  $z$  一定の面から傾いていることと, この角度が双曲面から原点へ向かう直線によって  $z = 0$  に平行な面へ写像されることのためである.

このように、例外を除いて、クライン円板の角度は実際の角度とも双曲面の角度とも一致しない。したがって、クライン円板の角度を考える場合は、双曲面の角度で考えなければならない。その一つの例として双曲余弦定理を考えてみよう。図のようにクライン円板上の三角形  $ABC$  を考える。角  $A$  を  $\alpha$ 、頂点  $ABC$  に対向する辺の長さを  $a, b, c$  とする。この三角形  $ABC$  に対応して双曲面に三角形  $A'B'C'$  が存在する。辺の長さは双曲面とクライン円板で両方共同じである。頂点  $A', B', C'$  の位置ベクトルを  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  とする。  $A'$  における  $A'B'$  方向の接ベクトルを  $\mathbf{u}$ 、  $A'C'$  方向の接ベクトルを  $\mathbf{v}$  とする。そうすると、  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  は一葉双曲面の位置ベクトルであるから、まず

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle = -1, \quad (38)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1, \quad (39)$$

の関係が成り立つ [1]。この  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  はクライン円板上ではそれぞれ  $AB, AC$  上あるいはその延長上にある。この  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  を用いて、次のようなベクトル  $\mathbf{a}'$  と  $\mathbf{b}'$  を考える。

$$\mathbf{b}' = \mathbf{a} + h\mathbf{u}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{a} + k\mathbf{v} \quad (40)$$

このとき、  $h$  および  $k$  は次のように決められる。式の形から  $\mathbf{b}'$  は  $A'B'$  を含む平面上にある。このとき、  $h$  を  $\mathbf{b}'$  が  $\mathbf{b}$  と同じ方向になるように選ぶことができる。つまり、  $h\mathbf{u}$  は  $A'$  を始点として  $\mathbf{u}$  が  $OB'$  と交差するところを終点とするベクトルである。(交差する点が  $\mathbf{u}$  よりも短いところにあり、延長上でないことはこの後でわかる。) このように決まる  $\mathbf{b}'$  は規格化されていない。正規化したベクトルは二葉双曲面上の点を示す位置ベクトルであるから、この場合は  $\mathbf{b}$  である。  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$  であるから、  $\mathbf{b}'$  の長さは

$$\langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathbf{a} + h\mathbf{u}, \mathbf{a} + h\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2h\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle + h^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -1 + h^2 \quad (41)$$

から得られる。  $\mathbf{a}'$  は上半回転錘の中にあるから  $\langle \mathbf{a}', \mathbf{a}' \rangle < 0$  である。したがって、式 (41) から  $0 < h < 1$  でなければならない。  $\mathbf{b}'$  を規格化すると  $\mathbf{b}$  となるから、以上の結果を用いて結局、

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}'}{\sqrt{1-h^2}} \quad (42)$$

となる。  $\mathbf{c}$  についても同様に、

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}'}{\sqrt{1-k^2}} \quad (43)$$

というように定義される。

一方、双曲面の線分の長さとお両端の位置ベクトルの関係から [1]、

$$\cosh b = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + k\mathbf{v} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + k\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \quad (44)$$

と表される。同様に、

$$\cosh c = -\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \quad (45)$$

である。したがって、式 (44), (45) から

$$\sinh b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \quad (46)$$

$$\sinh c = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \quad (47)$$

である。  $\cos \alpha = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  であるから、以上の結果を用いて、

$$\begin{aligned} \sinh a &= -\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\langle \mathbf{a} + h\mathbf{u}, \mathbf{a} + k\mathbf{v} \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}(-1 + hk\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha \end{aligned} \quad (48)$$

という双曲余弦定理が得られる。注意することはこの式に用いられている  $\alpha$  が双曲面の接平面におけるベクトル間の角度であって、クライン円板上の半直線間の角度ではないということである。クライン円板モデルでは測地線が実空間の直線によって表すことができるが、原点で交差する2つの直線のなす角度を例外として、角度が実際の角度あるいは双曲面の角度と一致しない。

## 5 クライン円板上の円, 楕円

クライン円板は等方的であるが、径方向は均一ではなく周辺に向かって単位長さは実空間で短くなり、円周は無遠になる。ある点からの等距離にある曲線は、それが中心の場合には実空間でも円になるが、中心と異なる場合には長さが実空間では均一でないために楕円になる。これを以下に示しておこう。

クライン円板でも、双曲面でも、対応する点間の距離は同じであるから、双曲面で考えることにする。中心点として、 $y = 0$  面と双曲面の交線上の1点  $A(\mathbf{r}_0)$  を選んでも一般性は失われない。これを

$$\mathbf{r}_0 = {}^t(\sinh t_0, 0, \cosh t_0) \quad (49)$$

とする [1]。  $\mathbf{r}_0$  すなわち  $A$  における接平面上にあり、  $A$  を中心に  $2\pi$  回転する単位ベクトル  $\mathbf{u}$  を考える。  $A$  から一定の距離  $r$  にある点  $\mathbf{r}$  は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cosh r + \mathbf{u} \sinh r \quad (50)$$

である [1]。この  $\mathbf{r}$  の軌跡をクライン円板へ投影した図形を考えればよい。

まず、  $\mathbf{u}$  を表すことを考えよう。  $\mathbf{u}$  は一葉双曲面上の点の位置ベクトルであるので  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$  である。点  $A$  における法線  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n}_0 = {}^t(\sinh t_0, 0, -\cosh t_0) \quad (51)$$

である [1]。一方、  $y = 0$  面の法線  $\mathbf{q}$  は

$$\mathbf{q}_0 = {}^t(0, -1, 0) \quad (52)$$

である。したがって、  $\mathbf{q}$  と  $\mathbf{n}$  に垂直な接線ベクトル  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{q} \times \mathbf{n}$  は、

$$\mathbf{u}_0 = {}^t \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ \sinh t_0 & 0 & -\cosh t_0 \end{vmatrix} = {}^t(\cosh t_0, 0, \sinh t_0) \quad (53)$$

である。(これは  $d\mathbf{r}/dt$  としても得られる。)  $\mathbf{u}_0$  と直交するもう1つの接線ベクトルは  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_0$  とすることができる、

$$\mathbf{v}_0 = {}^t \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh t_0 & 0 & -\cosh t_0 \\ \cosh t_0 & 0 & \sinh t_0 \end{vmatrix} = {}^t(0, -\cosh^2 t_0 - \sinh^2 t_0, 0) \quad (54)$$

$\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle = 1$  となるように正規化してこれを改めて  $\mathbf{v}_0$  とおくと、

$$\mathbf{v}_0 = {}^t(0, -1, 0) \quad (55)$$

である。これから、  $\mathbf{u}$  は次のように表すことができる<sup>1</sup>。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \cos \varphi + \mathbf{v}_0 \sin \varphi = {}^t(\cosh t_0 \cos \varphi, -\sin \varphi, \sinh t_0 \cos \varphi) \quad (56)$$

<sup>1</sup>この式で使われている  $\varphi$  は  $\mathbf{u}_0$  方向からの  $\mathbf{u}$  の角度と考えられそうであるが、そうではない。双曲空間では  $\mathbf{u}_0$  と  $\mathbf{v}_0$  の長さが異なるので、  $\varphi$  は楕円を描くパラメータであって厳密には  $\mathbf{u}$  の角度とは異なる。両者が等しく円になる場合は一致する。それ以外で一致するのは  $\varphi = n\pi/2$  および  $z = 0$  のときのみである。

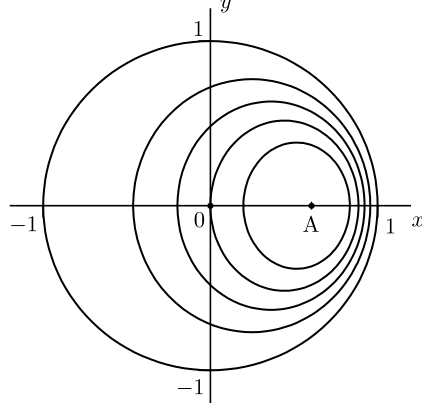


図 5: クライン円板上の双曲円. リーマン平面では楕円になる. 楕円は  $t_0 = 0.7$  で, 小さい方から  $r = 0.5, 0.7, 0.9, 1.2$  の場合. A は双曲円の中心で  $(\tanh t_0, 0)$ .

したがって,  $\mathbf{r}_0$  を中心とする半径  $r$  の円は式 (50) から,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= {}^t(x_1, y_1, z_1) \\ &= {}^t(\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos \varphi, -\sinh r \sin \varphi, \cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi) \end{aligned} \quad (57)$$

となる. これから, クライン円板上の座標  $(x, y)$  に変換すると,

$$x = \frac{x_1}{z_1} = \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos \varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi} \quad (58)$$

$$y = \frac{y_1}{z_1} = \frac{-\sinh r \sin \varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi} \quad (59)$$

となるので, この 2 つの式から  $\varphi$  を消去すればよい. あとは少し複雑であるが計算のみである. 式 (58) から,

$$\cos \varphi = \frac{(x \cosh t_0 - \sinh t_0) \cosh r}{(\cosh t_0 - x \sinh t_0) \sinh r} \quad (60)$$

となる. これから  $\sin \varphi$  を求めると,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{D}}{(\cosh t_0 - x \sinh t_0) \sinh r} \quad (61)$$

となる. ただし,

$$D = (\cosh t_0 - x \sinh t_0)^2 \sinh^2 r - (x \cosh t_0 - \sinh t_0)^2 \cosh^2 r \quad (62)$$

である. 式 (60), (61) を式 (59) に代入すると,

$$y \cosh t_0 \cosh r = \frac{-y \sinh t_0 (x \cosh t_0 - \sinh t_0) \cosh r + \sqrt{D}}{\cosh t_0 - x \sinh t_0} \quad (63)$$

となるので, これを整理すると,

$$y \cosh r = \sqrt{D} \quad (64)$$

となるから, この式を平方して  $D$  を展開することにより,

$$y^2 \cosh^2 r = -x^2 \cosh(t_0 + r) \cosh(t_0 - r) + x \sinh 2t_0 + \sinh(t_0 + r) \sinh(t_0 - r) \quad (65)$$

となる. すでにこの式は楕円を表す式になっているが, さらに整理して

$$\frac{(x - \lambda \sinh 2t_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (66)$$



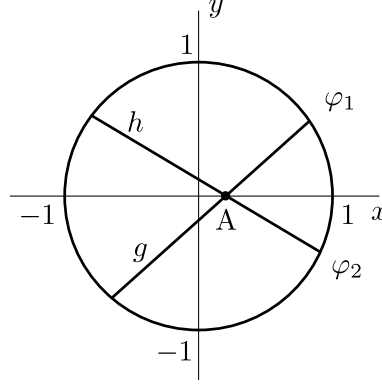


図 6: クライン円板上の  $x$  軸上の 1 点  $A$  と,  $A$  を通る 2 本の双曲直線  $g$  と  $h$ . それぞれ式 (58), (59) で  $\varphi = \varphi_1$  および  $\varphi = \varphi_2$  で表される.

とすることができる. ただし,

$$a = \lambda \sinh 2r \quad (67)$$

$$b^2 = a \tanh r \quad (68)$$

$$\lambda = \frac{1}{\cosh 2t_0 + \cosh 2r} \quad (69)$$

である. 図 5 は  $x$  軸上の点を  $(\tanh t_0, 0)$  を中心として半径  $r$  の双曲円を示す. ユークリッド平面では楕円になる.

## 6 クライン円板の内積, 角度 (続き)

第 4 節で双曲余弦定理を導く際に, クライン円板において交差する 2 つの双曲直線のなす角度が双曲面で対応する双曲直線の交差する角度よりも大きいことを定性的に述べた. これをもう少し詳しく定量的に記しておこう.

まず, 交差する点として任意の点を考える. クライン円板は原点に関して点対称であるから, 任意の点を図 6 のように  $x$  軸上に点  $A(\coth t_0, 0)$  をとつても良い. 点  $A$  を通る 2 つの双曲直線を  $g$  および  $h$  とする.  $g$  と  $h$  は式 (58) および (59) で  $\varphi = \varphi_1$  と  $\varphi = \varphi_2$  で表されるとしよう. 2 つの双曲直線のなす角度はそれぞれの接ベクトルの間の角度であるが, クライン円板の双曲直線はユークリッド直線でもあるため, 直線の間と一致する. そこで点  $A$  からの双曲距離  $r$  の点と点  $A$  の差, すなわち  $\Delta x$  と  $\Delta y$  を求めると次式となる.

$$\begin{aligned} \Delta x = x - x_0 &= \frac{\sinh t_0 \cosh r + \cosh t_0 \sinh r \cos \varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi} - \frac{\sinh t_0}{\cosh t_0} \\ &= \frac{\sinh r \cos \varphi}{\cosh t_0 (\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi)} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \Delta y = y - y_0 &= y \\ &= \frac{\sinh r \sin \varphi}{\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi} \end{aligned} \quad (71)$$

これから  $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  を計算すると,

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \frac{\sinh^2 r (\cos^2 \varphi + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi)}{\cosh^2 t_0 (\cosh t_0 \cosh r + \sinh t_0 \sinh r \cos \varphi)^2} \quad (72)$$

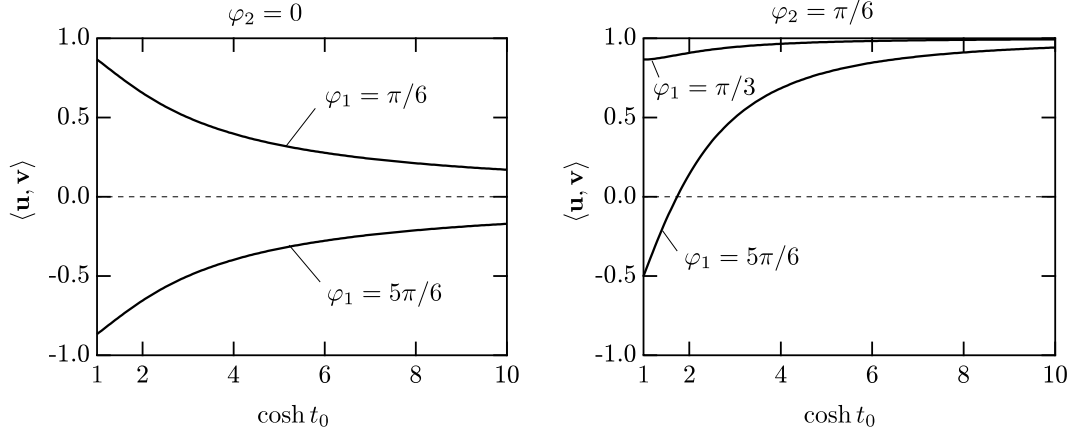


図 7: 図 6 のクライン円板上の 2 つの双曲直線方向の単位ベクトルの内積. 左図は  $h$  が  $x$  軸の場合, 右図はそれぞれの直線が  $x$  軸の同じ側へ延びる場合.

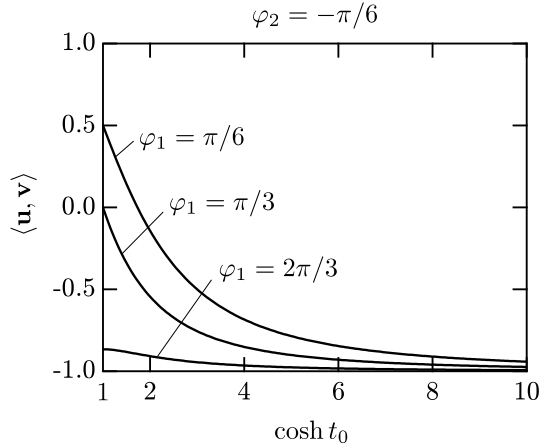


図 8: 図 6 のクライン円板上の 2 つの双曲直線方向の単位ベクトルの内積. それぞれの直線が  $x$  軸の両側へ延びる場合.

となる. したがって,  $g$  と  $h$  の単位接ベクトル  $\mathbf{u}$  ( $\varphi = \varphi_1$ ) および  $\mathbf{v}$  ( $\varphi = \varphi_2$ ) の成分は

$$u_x = \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_1}} \quad (73)$$

$$u_y = \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\cosh t_0 \sin \varphi_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_1}} \quad (74)$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\cos \varphi_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_2}} \quad (75)$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\cosh t_0 \sin \varphi_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_2}} \quad (76)$$

となる. これより, 内積  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  は

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cosh^2 t_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_1} \sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \cosh^2 t_0 \sin^2 \varphi_2}} \quad (77)$$

となる.

ここで得られた式 (77) の振る舞いを調べてみよう. まず,  $\cosh t_0 = 1$  のときは

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (78)$$

という通常の関係になる。これは  $A$  が双曲面の頂点にある場合である。この場合は実際の角度とも一致する。

式 (77) からでは、内積  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle$  の振る舞いは簡単にはわかりにくいだが、 $\varphi_2 = 0$  の場合は簡単で、 $-\pi/2 < \varphi_1 < \pi/2$  のときは  $\cosh t_0$  が増加すると 0 に単調減少し、 $\pi/2 < \varphi_1 < 3\pi/2$  のときは 0 に単調増加する。つまり、 $\pi/2$  に近づくことがわかる。数値計算の結果を図 7 左に示す。つまり、 $g$  と  $h$  の交差角度は  $\pi/2$  に漸近する。

$\varphi_2 \neq 0$  の場合における数値計算の結果を図 7 および図 8 に示す。 $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  が両方共正の場合 ( $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi$ )、あるいは両方共  $x$  軸の同じ側にある場合、内積  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle$  は  $\cosh t_0$  とともに単調増加して 1 になる。 $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi/2$  の場合は最初わずかに減少してから単調増加に転じて 1 に漸近する。いずれの場合も内積で定義される角度は 0 に漸近する。つまり、 $g$  と  $h$  の交差角度は 0 に漸近する。

$\varphi_1$  と  $\varphi_2$  の符号が反対の場合 ( $0 < \varphi_1 < \pi$  および  $-\pi < \varphi_2 < 0$ 、あるいはその逆)、すなわちそれぞれが  $x$  軸の反対側にある場合、図 8 に示すように、単調減少して -1 に漸近する。つまり、 $g$  と  $h$  の交差角度は  $\pi$  に漸近する。

これは結局、クライン円板の直線は、 $\varphi$  が  $\pi/2$  または  $-\pi/2$  のうち近い方に  $\cosh t_0$  の増加にしたがって漸近してゆくということである。

## 参考文献

- [1] 2017/2/10 の entry 双曲面幾何 その 2  
[http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid\\_geo\\_2.pdf](http://totoha.web.fc2.com/Hyperboloid_geo_2.pdf)